システム数理IV 第8回

牧野淳一郎

1999 年 6 月 20 日

1 微分方程式と数値解の安定性

今日は、「安定性」について考える。数値解について考えるまえに、まず微分方程式の安定性について考えておこう。というのは、元の微分方程式が安定でなければ、数値解が安定とか不安定とかいってもなにが不安定なのか良くわからないからである。考える微分方程式はとりあえず一般的な形

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \tag{1}$$

としておく。(これまで、時間発展ということで独立変数に t を使っていたが、ちょっと表記が混乱しているところもあるのでここからは独立変数を x, 従属変数を $\boldsymbol{y}$ とする。)

1.1 定常解の局所的安定性

さて、安定性というものを定義しないといけない。そのために、まず、「定常解の安定性」というものを考えることにする。定常解とは、 要するにある$\boldsymbol{y}_0$ というものがあって、

$$\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_0) = 0 \tag{2}$$

を満たすもののことである。まあ、 x が微分方程式の右辺に入っていると、特別な条件の下でなければ定常解はないので、以下

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \tag{3}$$

の形、つまり右辺に x が入らないものを考える。これを自律型という。この時はもちろん定常解の満たす方程式は

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0) = 0 \tag{4}$$

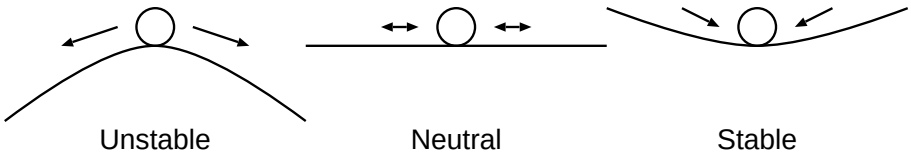
ということになる。

さて、この解が局所的に安定かどうかというのは、以下のような意味であると考えられるであろう。

「なんらかの理由 (外乱とか) で、定常解から少し離れたところに解がいった時に、もとの解にもどる」ということをさして安定であるという。

ちょっと図に例を示してみよう。左の図のように、盛り上がったところの一番上にボールかなにかをおいたら、ぴったり頂上におけばそれは止まっている。つまり、頂上は定常解である。しかし、す

こしでも頂上、すなわち定常解からずれたらそのままころげおちてしまう。これは不安定な定常解ということになろう。



これにたいし、右の図のように谷底ならば、すこしずれたらもとのところの戻ろうとする。さらに、摩擦や空気抵抗があるから、そのうちにもとのところに止まる。これは安定解ということになる。

仮に、厳密に水平な面が広がっていたとすれば、少し動かすと動かしたところでそのまま止まっていることになるであろう。これは中立安定状態ということになる。

上の説明は直観的ではあるが、ちょっと怪しいところがある。この場合どんな方程式を考えているのであろうか ?例えば以下のような方程式ということになろう ：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y) - \alpha\frac{dy}{dx} \tag{5}$$

ここで、 $f(y)$ は地面からの力であり、 第二項は抵抗による力である。抵抗は速度に比例するということにしておく。これは y と dy/dx の 2 変数の方程式である。

さて、これの定常解 (この場合平衡解という言葉をつかうことのほうが多い) の回りで、解がどう振舞うかを調べてみることにする。平衡解は

$$\begin{aligned} y &= y_0 \\ y' &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

である。今、

$$Y_0 = y - y_0 \tag{7}$$

$$Y_1 = y' \tag{8}$$

とおいて元の微分方程式を書き直す。この時、 f が

$$f(y_0 + Y_0) = kY_0 + O(Y_0^2) \tag{9}$$

と近似出来ることに注意すると、

$$\frac{dY_0}{dx} = Y_1, \quad \frac{dY_1}{dx} = kY_0 - \alpha Y_1 \tag{10}$$

あるいは、行列形式なら

$$\begin{pmatrix} Y_0' \\ Y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

ということになる。これはもちろん以下の形の解を持つ

$$\boldsymbol{Y} = C_0\boldsymbol{Y}_0 \exp\lambda_0 + C_1\boldsymbol{Y}_1 \exp\lambda_1 \tag{12}$$

ここで、 λ_0 とλ_0は行列 A の固有値である (今、縮退している場合とかはちょっと置いておく。式は特別になるが振舞いはたいして変わらない)。固有方程式は

$$\lambda^2 + \alpha\lambda - k = 0 \tag{13}$$

の形をとる。ここで、$\alpha > 0$ としておく (抵抗が速度と逆方向に働く) とすれば、k の値によって解の振舞いは 5 つの領域に分かれる。

- $k > 0$ の時 :固有値はどちらも実数であり、片方は正でもう片方は負である。最終的には正の固有値のほうが効いて、平衡点から遠ざかっていく
- $k = 0$ の時。固有値の一つが 0、もう一つが負である。0 に対応する固有解は定数である。もう一方は減衰する。
- $0 > k > k_c = -\alpha^2/4$ の時。固有値はどちらも負の実数である。$x \to \infty$ で $Y \to 0$ が任意の初期条件についてなり立つ。つまり安定である。
- $k = k_c$ のとき。固有値が縮退し、解が $(C_1 + C_2 x)\exp \lambda x$ の形になる。安定。
- $k < k_c$ のとき。固有値は複素数だが、実部は負。安定。

固有値が実数か複素数かの違いは、解が振動的になるかどうかである。

一般の微分方程式でも、定常解があればその回りで線形化することで同様な議論ができることになる。安定であるということの条件は、全ての固有値の実部が負であるということである。

なお、念のため注意しておくが、一般の場合には、複素固有値で実部が正というばあいもありえる。上の例ではそれが起きなかったのは、 $\alpha > 0$ という条件をつけたからである。これを外す (負性抵抗) と、$k < 0$ の時に振動しながら平衡値から遠ざかっていく解が現れる (振動的発散)。

1.2 特別な場合—散逸のない系

さて、上の方程式で $\alpha = 0$ としたものを考えると、これは $k < 0$ で固有値が純虚数になる ($k \geq 0$ なら非負の実数) 固有値が純虚数の時には解は振幅一定の単振動になり、初期に与えた摂動がそのまま残る。

このような系は安定平衡点を持たないが、実用上は特別に重要である。というのは、理想化された古典力学系 (ハミルトン系) はすべてこのような、安定平衡点を持たない系であるからである。この場合には安定性の意味が変わる。これについては後で扱うことにしたい。

1.3 非線形領域での解

ハミルトン系については別に扱うとして、安定平衡点を持たないような非線形の連立常微分方程式系はどのように振舞うのであろうか ?非常に大雑把にいうと、2 つのケースに分かれる。

1.3.1 極限周期軌道を持つ場合

van der Pol 方程式などが良い例であろう。平衡点はあり、局所的には不安定である。が、これは局所的に負性抵抗があることによっていて、大域的には抵抗は正になっている。従って、平衡点の近くでは回りながら遠ざかり、遠くでは回るのは同じだが逆に平衡点に近付く。どこか途中に、それ以上平衡点から遠ざかりも近付きもしない極限解 (極限周期軌道、 limit cycle) があり、すべての解がいつかはそこにいく。位相空間が 2 次元 (つまりは、2 変数) の場合は、運動が有界で定常解を持たなければかならず極限周期軌道を持つということが知られている。

多変数の場合には 2 重周期とかになって単純な一本の軌道ではないが、とにかく可能な位相空間の、次元が下がった部分空間のなかだけを運動する。

1.3.2 カオス的な場合

3 変数以上の場合でないと起こらないが、上のようなリミットサイクルを持たず、なんだかよくわからない動きをする。解が動く空間の次元がもとの可能な範囲に比べて下がらない (が、実際にもとの可能は範囲を埋めつくすかどうかというのは大問題で、まだ非常に特別ないくつかのケースについてしか分かっていない)。

1.3.3 リヤプノフ指数

非線形方程式の場合、上のような周期軌道についてそれが安定かどうかということを問題にすることができる。つまり、少し軌道からそらしてやって、だんだんもとの軌道にもどれば安定、はなれていけば不安定ということになるのである。これはリヤプノフ指数というものを考えることで判定できる。これについては詳しくは触れないが、要するに軌道にそって線形化して、その解の固有値を調べるということに相当する。

系がカオス的になるためには最大リヤプノフ指数が正である必要がある。これが十分条件かどうかはわかっていない。

2 数値解の安定性

これから数値解の安定性というものを考える。もとの解が定常解を持てば、数値解の安定性というのは要するにその定常解がやはり安定である、つまりそこから少し離れたところから出発すると、必ずその定常解にいくということである。

極限周期軌道を持つ場合にも安定性の概念を拡張することができるし、またもとの解が定常でも周期的でもない場合でも、数値解がその解からどの程度離れていくかという意味の安定性を考えることはできなくはない。これについてはあまり詳しくはここでは扱わない。かなり難しいのと、とりあえず定常解のことが良く分かってないとそういった話をしてもあまり役にたたないからである。とりあえず、もとの方程式が線形で安定な定常解を持つ場合に、数値解の安定性とはどういうことかを考えていこう。

2.1 陽的オイラー法の安定性

一変数線形常微分方程式

$$y' = \lambda y \quad (\lambda < 0) \tag{14}$$

を、前進 (陽的) オイラー法

$$y_{i+1} = y_i + hy'|_{y=y_i} \tag{15}$$

で積分する場合を考えてみる。すぐにわかるように、

$$y_{i+1} = y_i(1 + h\lambda) \tag{16}$$

から、

$$y_n = y_0(1 + h\lambda)^n \tag{17}$$

となる。安定であるとは $n \to \infty$ で $y_n \to 0$ となることであるから、その条件は

$$|1 + h\lambda| < 1 \tag{18}$$

つまり

$$h < -\frac{2}{\lambda} \tag{19}$$

ということになる。

すこし考えてみるとすぐにわかるように、$h\lambda < -1$ の数値解は解としてはむちゃくちゃなものであるが、まあ、それでも安定ではある。

さて、多変数の場合はどうなるかということを考えると、結局、線形の場合は対角化してしまえば一変数の場合と全く同じで、各変数が安定であればいい。ただし、少し違うのは、複素数の固有値が発生するということである。このために、安定性条件が式 (18) から簡単にならない。そこで、通常、 $\bar{h} = h\lambda$とおいてこれがどういう範囲であれば安定かという議論をする。

一変数 (実固有値) の場合には、安定であるのは$\bar{h}$が開区間 $(-2, 0)$ にある場合である。複素数の固有値のときは、複素平面上で考えると、$\bar{h}$が中心 $(-1, 0)$、半径 1 の円の内部で安定ということになる。なお、上のような、元の方程式に安定解がある時に数値解がそこにいくという性質を、特に 「絶対安定性」ということがあり、$\bar{h}$の複素平面上で絶対安定である領域のことを絶対安定領域という。

前進オイラー法の絶対安定領域はあまり広くない。が、それが問題にならないような場合も結構多いということがわかるであろう。普通は h は $|h\lambda| << 1$ となるようにとる。この時は、不安定になるのは固有値の虚部が実部に比べて大きい場合に限られる。

2.2 後退オイラー法の安定性

後退 (陰的) オイラー法

$$y_{i+1} = y_i + hy'|_{y=y_{i+1}} \tag{20}$$

で積分する場合を考えてみる。すぐにわかるように、

$$y_{i+1} = y_i \frac{1}{1 - h\lambda} \tag{21}$$

から、

$$y_n = y_0(1 - h\lambda)^{-n} \tag{22}$$

となる。$\lambda < 0, h > 0$ なので $|1 - h\lambda| > 1$ であり、後退オイラー法の絶対安定領域は左半平面全体であるということがわかる。言い替えれば、

後退オイラー法は数値不安定を起こすことはない。

これは、前進オイラー法に比べた後退オイラー法の目覚しい特徴である。

2.3 線形多段階法の安定性に関する一般論

一般に線形多段階法についてはオイラー法と同様な扱いができる。つまり、使う公式を決めたら、それで一変数線形の方程式を解いて見る。すると、それが一般に $y_n = \xi^n$ の形をとる。ξ は、安定性多項式と呼ばれる、要するに y_i を ξ^i で置き換えてできる代数方程式の根である。このとき、絶対安定である条件は、すべての ξ の絶対値が 1 より小さいということになる。

例えば、前回の補外法のところで出てきた中点公式

$$y_{i+2} = y_i + 2hf(x_{i+1}, y_{i+1}) \tag{23}$$

を考えてみよう。安定性多項式は

$$\xi^2 - 2\bar{h}\xi - 1 \tag{24}$$

となり、実解が 2 つある。すぐにわかるように、$\bar{h} \neq 0$ ならば必ず解の一つは絶対値が 1 より大きいので、中点公式には絶対安定領域がない、言い替えればかならず不安定であるということがわかる。

これにたいし、アダムス法はちゃんと絶対安定領域を持つ。但し、次数が上がるにつれて小さくなるし、陽公式の安定領域は陰公式のそれよりもずっと狭い。

2.4 陽的ルンゲ・クッタ公式の安定性

ルンゲ・クッタ公式についても、線形多段階法の場合と同様に絶対安定領域を求めることが出来る。陽的公式については、以下の面白い結果が知られている

- 4 次までの公式（段数と次数が等しいもの）の絶対安定領域は、次数だけで決まる。
- 4 次まででは高次の公式のほうが安定領域が広い。

特に、3 次以上の公式では、絶対安定領域が右半平面に張り出す。これは、言い替えれば、本当なら振動的に発散するか一定振幅で無限に振動するはずの系が、数値解では振動的に収束するということであって必ずしも正しい振舞いというわけではないが、それでいいような場合も多い。

5 次以上では、公式によって安定領域が違う。精度と安定領域のどちらを優先するかでさまざまな公式が作られている。

2.5 陰的ルンゲ ・ク ッタ公式の安定性

陰的ルンゲク ッタについては、陽的公式よりもはるかに強い結果が得られている:陰的ガウス公式の安定領域は、左半平面全体である。また、Radau 公式のような、もっと広い安定性領域を持つものも知られている。

これは、陰的公式、とくに full-implicit な公式の重要な利点の一つである。

2.6 補外法の安定性

良くわかっていない。 h のとりかたを決めれば、ルンゲ ・ク ッタの一種とみなせるので、そういう研究はある。具体例では、割と狭いという結果が得られているようである。

3 次週予告

次回は、硬い (stiff な) 方程式と、そのための数値解法についてまとめる。