宇宙物理における粒子法

牧野淳一郎
国立天文台理論研究部/天文シミュレーションプロジェクト

「粒子法」と書いてあるけど重力多体系の話しかしません。

Center for Computational Astrophysics

概要

- 初めに:重力多体系ってどんなもの？
  - 有限粒子系と連続近似
  - 基礎方程式、力学平衡
  - 衝突系と無衝突系
- 有限粒子系を別の有限粒子系で表すとはどういうことか？
- 数値計算の意味

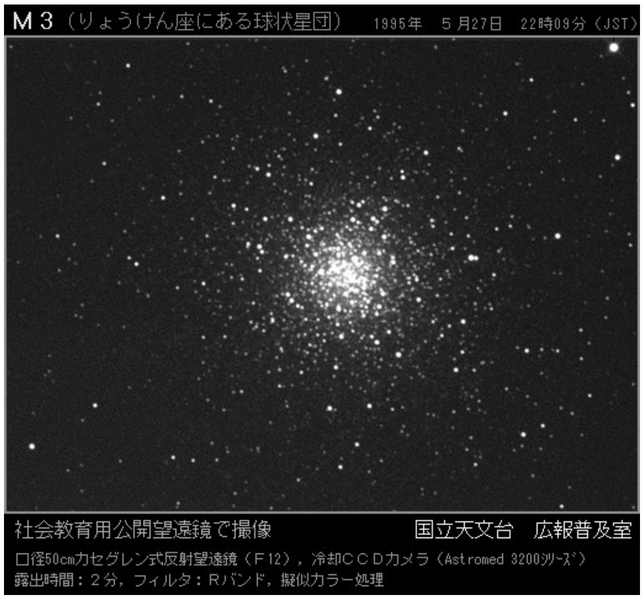
重力多体系ってどんなもの？

- 重力でものが集まっている
- 普通の星のように流体的な圧力とか縮退圧とかで支えられているわけではない

もの。大雑把には、星より大きくてガス雲でないもの全て。

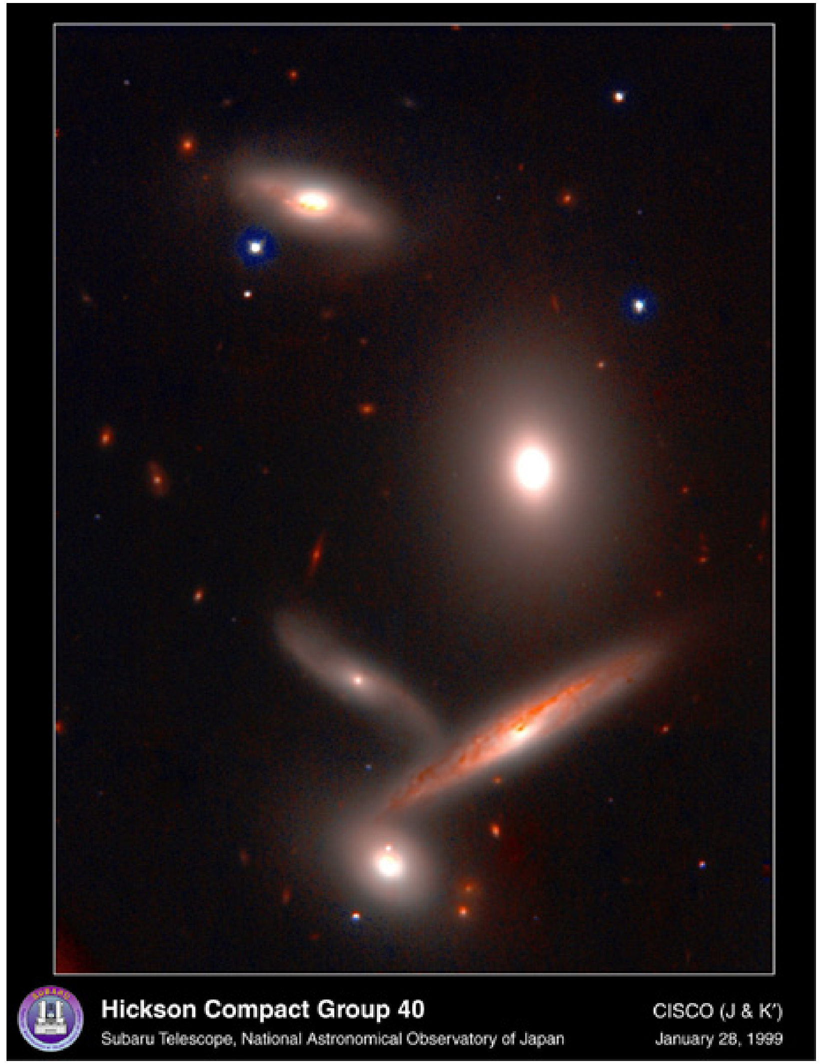
そもそもどんなもの？(観測)

球状星団

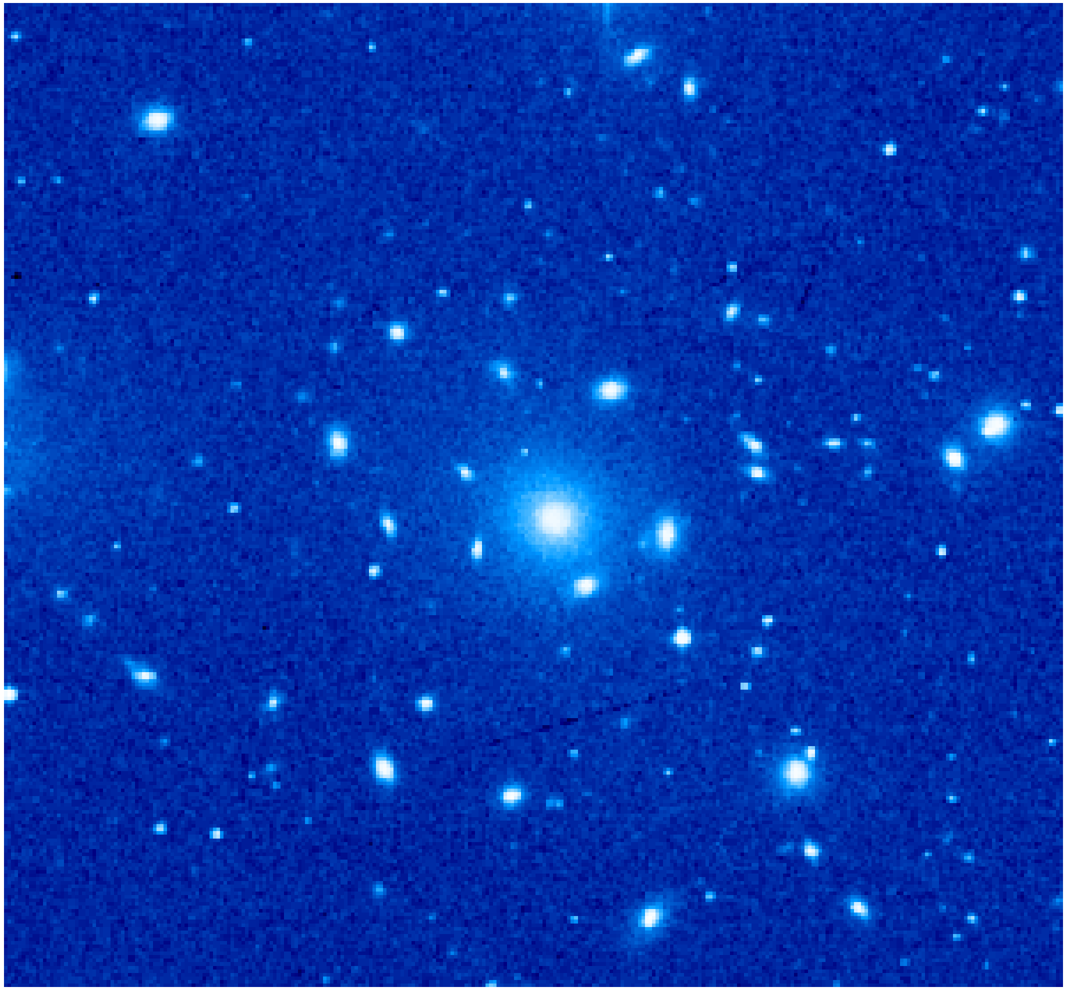


銀河

銀河群

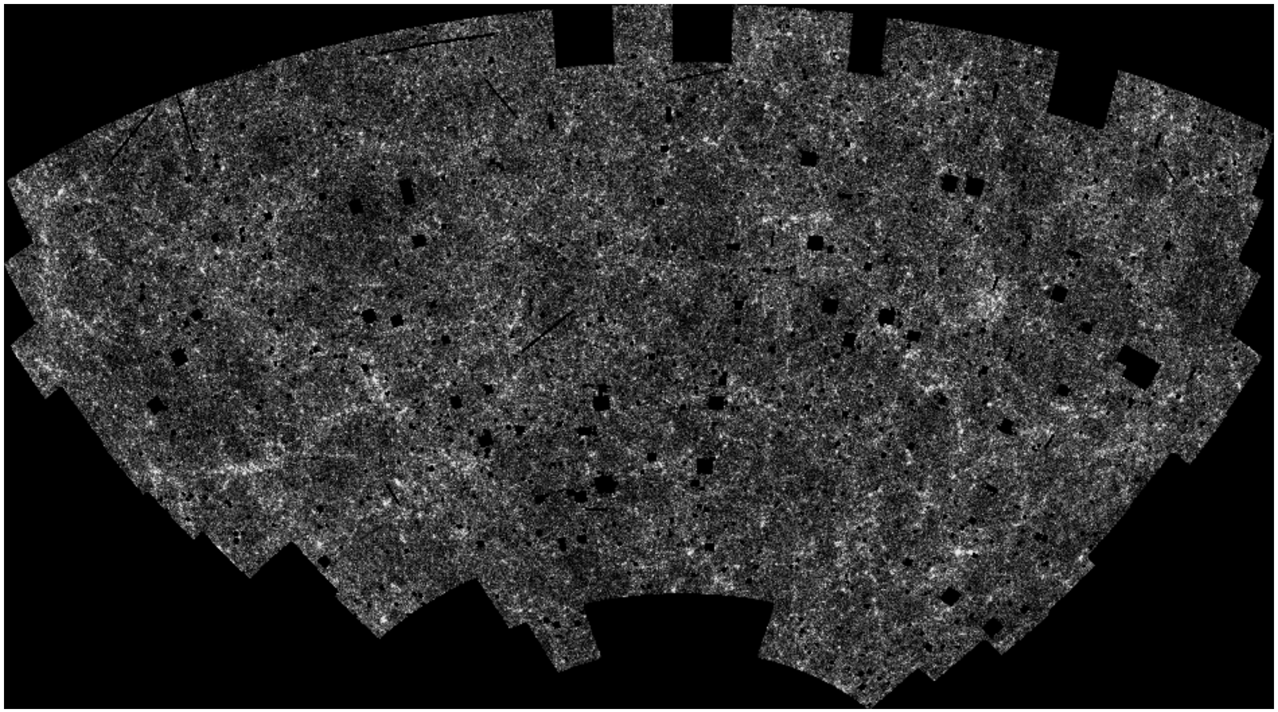

Hickson Compact Group 40
Subaru Telescope, National Astronomical Observatory of Japan
CISCO (J & K')
January 28, 1999

銀河団



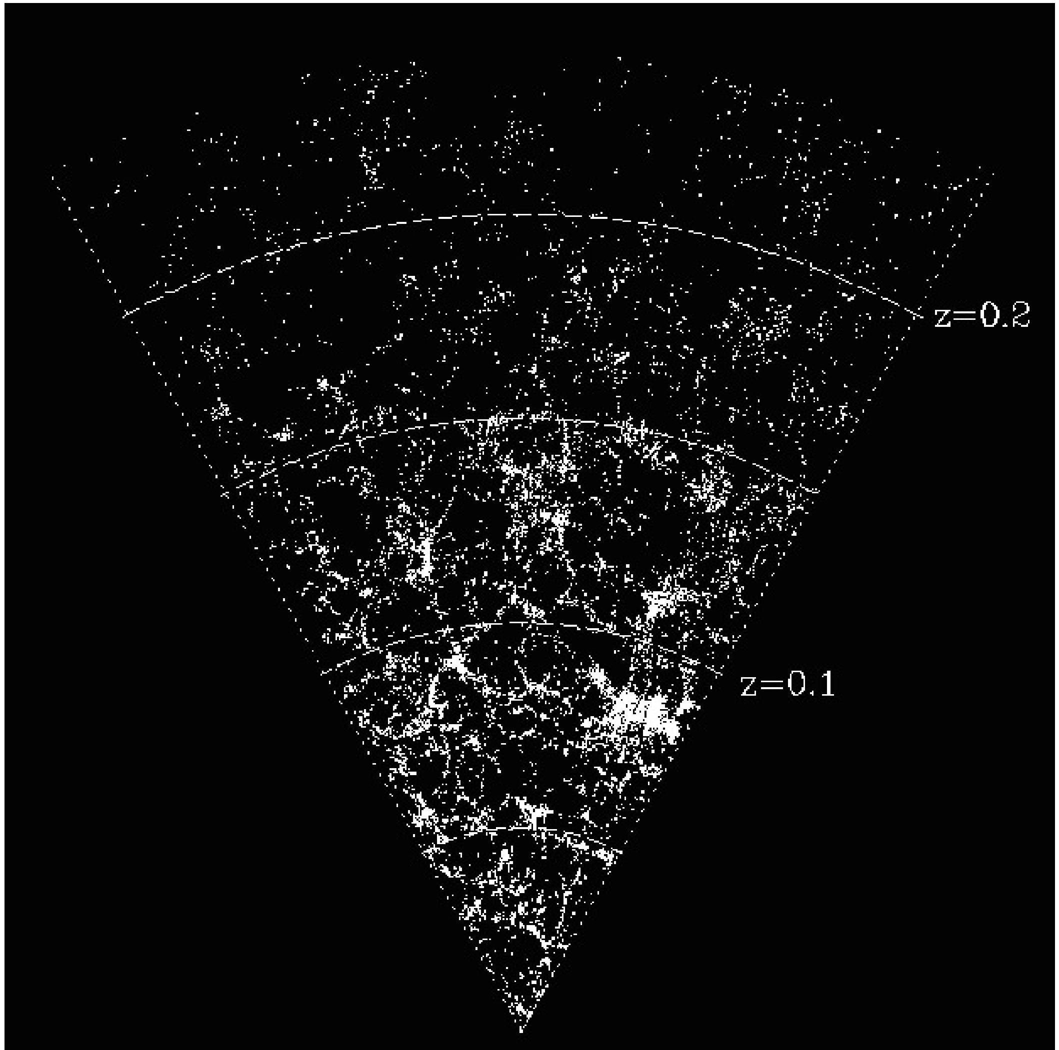
http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap950917.html

大規模構造 (天球面)



http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~wjs/apm_grey.gif

大規模構造 (距離情報あり) — SDSS スライス



有限粒子系と連続近似

多体系の運動方程式：

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} f_{ij} \tag{1}$$

x_i と m_i は粒子 i の位置と質量、 f_{ij} は粒子 j が粒子 i に及ぼす力。

重力多体系なら f_{ij} はニュートン重力

$$f_{ij} = G m_i m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3}, \tag{2}$$

G は重力定数。

が、この式をじっとみていてもほとんど何もわからない。

分からない理由

(特別な場合を除いては) 運動方程式が解析的に解けない。
解ける場合や、近似的に解ける場合は色々ある。

- ニュートン重力での 2 体問題 (ケプラー問題)
- 特殊な初期条件からの 3 体問題
- 粒子数無限大の極限での力学平衡解
- 粒子数無限大の極限での自己相似解や摂動解等

つまり

粒子数無限大を考える意味: 「わかる」もので近似する

粒子系の数値計算: 計算機なら有限粒子系の数値解を出せる

但し、

- 現実の系と同じ粒子数を扱えるとは限らない
- 同じ粒子数を使っていたら数値解は正しいか？も問題

連続近似での基礎方程式-(無衝突)ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \tag{3}$$

f:6 次元位相空間での分布関数 Φ :重力ポテンシャル, 以下のポアソン方程式の解

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \tag{4}$$

ここで、 G は重力定数であり、 ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int dv f, \tag{5}$$

　なお、以下の議論では（当分） m のことは忘れて、その代わり f が個数密度ではなくて質量分布であるということにしておく。

ボルツマン方程式の導出

- 時間がないので省略
- 直観的な意味:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

要するに 6 次元位相空間でのラグランジュ微分 Df/Dt

- で、これが $= 0$: 非圧縮での連続の式
- なぜ非圧縮？という辺りから？かと。

力学平衡

自己重力系の力学の「もっとも重要な」概念

$$\boxed{\text{無衝突ボルツマン方程式とポアソン方程式を連立させたものの定常解}}$$

ある分布関数 f とポテンシャル Φ が力学平衡にある$=$

- Φ は f から求めた空間での質量密度を右辺とするポアソン方程式の解
- 無衝突ボルツマン方程式にこの Φ を入れると f の時間微分が 0 になる

流体との違い

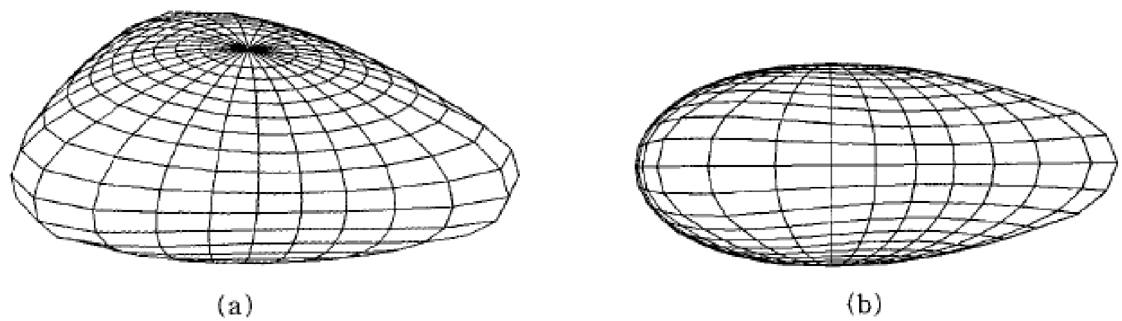
自己重力流体の平衡形状

- 回転なし＝球対称: 静水圧平衡、状態方程式が決まれば決まる
- 回転あり: さらに回転則もいれればきまる。

重力多体系: 回転がなくても変な形のものが作れる。方向によって速度分布が違ってよい (流体の言葉だと圧力が非等方)

回転していれば流体でも、、、

一様回転する流体の平衡形状の例



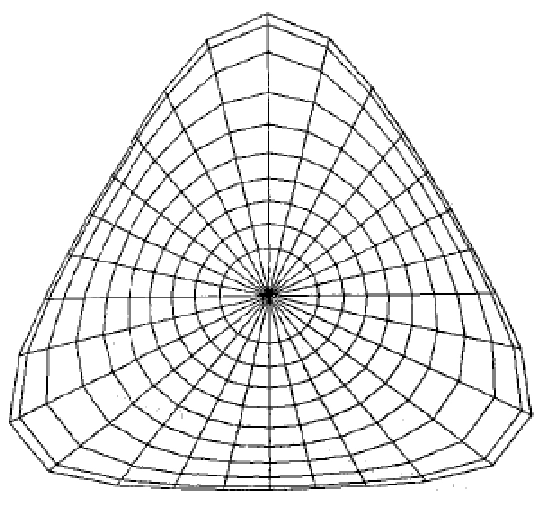


Fig. 2. A shape of the Triangle equilibrium just preceding to the mass-shedding. (a) Seen from the direction of $\theta = 70^\circ$ and $\phi = 45^\circ$. (b) Seen from y-axis direction. (c) Seen from z-axis (rotation axis) direction.

Hachisu and Eriguchi 1982 から「三角おにぎり」

回転していれば流体でも､､､

一様回転する流体の平衡形状の例

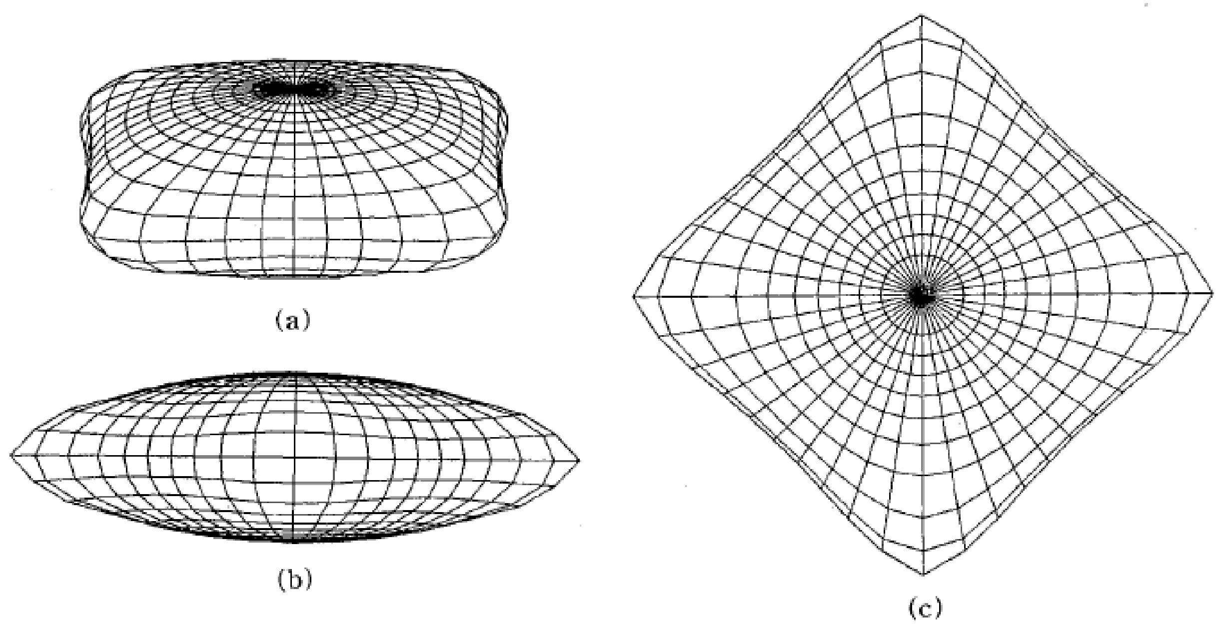


Fig. 3. Same as Fig. 2 but for the Square sequence.

Hachisu and Eriguchi 1982 から「回転座布団」

無衝突ボルツマン方程式と熱平衡

　力学平衡ではないところからの無衝突ボルツマン方程式に従った時間発展を考える。

　これは流れにそって f を保存するので、系のエントロピー $(f \log f$ の積分$)$ は一定、つまり、少なくとも形式的にはエントロピーは保存される。

　もちろん、「形式的には」と断わるのは、もうちょっとややこしい問題があるから。

ジーンズの定理

「運動の積分」というものについて以下の「ジーンズの定理」がなり立つ。

ジーンズの定理: 与えられたポテンシャル Φ の下での無衝突ボルツマン方程式の任意の定常解は、運動の積分を通してのみ位相空間座標に依存する。逆に、任意の運動の積分の関数は定常解を与える。

つまり

分布関数 f が定常である $\leftrightarrow$ 運動の積分 $I_1, I_2, ..., I_m$ があって $f = f(I_1, I_2, ..., I_m)$ の形で書ける

これはとても基本的で重要な定理

運動の積分って?

ポテンシャル Φ のもとで、ある x, v の関数 I が運動の積分であるとは、その上での粒子の運動に対して

$$\frac{d}{dt}I(x,v) = 0, \tag{6}$$

がなり立つこと。

つまり、実際にすべての粒子の軌道について、その上でその量が変化しないということ。要するに、エネルギーとか、球対称なら角運動量とか。

ちょっと変形すれば

$$v \cdot \nabla I - \nabla\Phi \cdot \frac{\partial I}{\partial v} = 0 \tag{7}$$

無衝突ボルツマン方程式の定常解と同じ式

球対称の場合

球対称の場合、運動の積分はエネルギーと角運動量の 3 成分で 4 つ。

一般にはもう一つあるが、これは特別な場合を除いてあまり意味がないので、定常な分布関数はエネルギーと角運動量だけで書けると思っていい。

意味がある特別な場合: ケプラー軌道のような、軌道が閉じる場合。

この時には、エネルギーと角運動量の他に、軌道全体の向きを表す量（近点経度、ラプラス・ルンゲ・レンツ・ベクトル）が保存する。これはちゃんと保存量になっている。

普通の球対称ポテンシャル

一般には軌道が閉じない。

近点経度に対応するような保存量は実は存在している

でも、ある軌道はエネルギーと角運動量で決まる部分空間を覆ってしまう

（数学的には、もちろんすべての点を覆えるのではなく、任意の点について、いくらでも近くにいけるというだけだが）。

その保存量に分布関数が依存すると、連続性とか微分可能性とかに困難を生じる。あんまり物理的ではない。

$f(E, J)$

球対称だと f はエネルギー E と角運動量ベクトル J による

球対称なので f は J の方向に依存しない $\longrightarrow$ 絶対値だけに依存する

球対称の分布関数は一般に $f(E, J)$ と書ける。

これが無衝突ボルツマン方程式の平衡解になっていれば、無限の時間たってもなにも起きないはず。

有限粒子系の場合

例えば、球対称で力学平衡な分布関数を有限個の粒子で近似したとする。あるいは、実際に存在する球状星団を考えてみる。

一つの星の軌道はどうなるか？

- 重力場全体: それぞれの星が動くので、完全に一定にはならない
- 近くの星: たまたま近くにくると重力で軌道を曲げる

近接遭遇

系の半径が1、質量も1、重力定数も1、となるような単位系で考えると、粒子の速度は1程度(後ででてくるビリアル定理)。

粒子の速度が大きく変わるような近接散乱: 粒子数が N として、距離が$1/N$ 程度まで近づく(ポテンシャルエネルギーが運動エネルギーの程度になる) 必要あり。

一回起こるまでに時間が N くらいかかる。

場のゆらぎ

N 個の粒子が勝手に動くので、ある点での重力ポテンシャルは$1/\sqrt{N}$ 程度揺らぐはず。

ゆらぎの時間スケールは典型的な粒子の軌道周期程度。

1つの粒子のエネルギーも単位時間に$1/\sqrt{N}$ 程度揺らぐはず。

やはり N 程度の時間がたつと大きくエネルギーが変わる。

両者の関係

　どちらも同じくらい効く。実は中間的な距離スケールも効く。

　ちゃんと計算すると、粒子の軌道が変化する時間スケールは $N/\log N$ 程度になる。

　これは「熱力学的」な進化をうながす。つまり、エントロピーを生成して系を熱平衡に向かわせる

　いわゆる「2 体緩和」、「衝突項」

有限粒子系と連続近似の違い

というわけで、重要な違い:

- 連続近似 (無衝突系) では時間発展しない力学平衡状態でも、有限粒子系では熱平衡に向かう進化をする
- 進化のタイムスケールは $N \log N$ に比例、粒子数が大きいと長い

(但し、熱平衡状態は一般には存在しない)

現実の系と連続近似とシミュレーション

現実の系が無衝突系とみなせる場合:

1. 現実の系を粒子数無限の系で近似
2. 粒子数無限の系を現実よりもっと少ない粒子数の系で近似

- 誤差はステップ (2) のほうがずっと大きいので、こっちを考えておけばよい「はず」
- 銀河シミュレーション、宇宙論的シミュレーションはこっち、というのが常識

他の方法は？

無衝突ボルツマン方程式は偏微分方程式。差分法では解けないのか？

位相空間は次元数が多い、というのが問題

- 空間 1 次元、並進対称: 位相空間 2 次元。これならできる
- 空間 1 次元球対称: 位相空間 3 次元。最近ならできなくもない
- 空間 2 次元軸対称: 位相空間 5 次元。うーん
- 空間 3 次元: 位相空間 6 次元。うーーーーん

1 次元と 2 次元の間に越えられそうにない壁

計算精度について

重要なこと:「粒子数が少ないことによる 2 体緩和」は本質的には他の計算誤差と同じ、「数値的な誤差」

他の誤差 (時間積分の誤差とか、相互作用の計算の誤差) は、結果への影響が 2 体緩和よりも小さければ十分。それ以上に精度を上げるのはあまり意味がない。

ツリー法とか $\mathrm{P^3M}$ とかの、割合いい加減そうな方法でもよいのはそういう理由。

但し、2 体緩和の誤差はランダムと思ってよい (時間のリニアでつもらない) ので、その辺注意必要。

現実の系が衝突系の場合

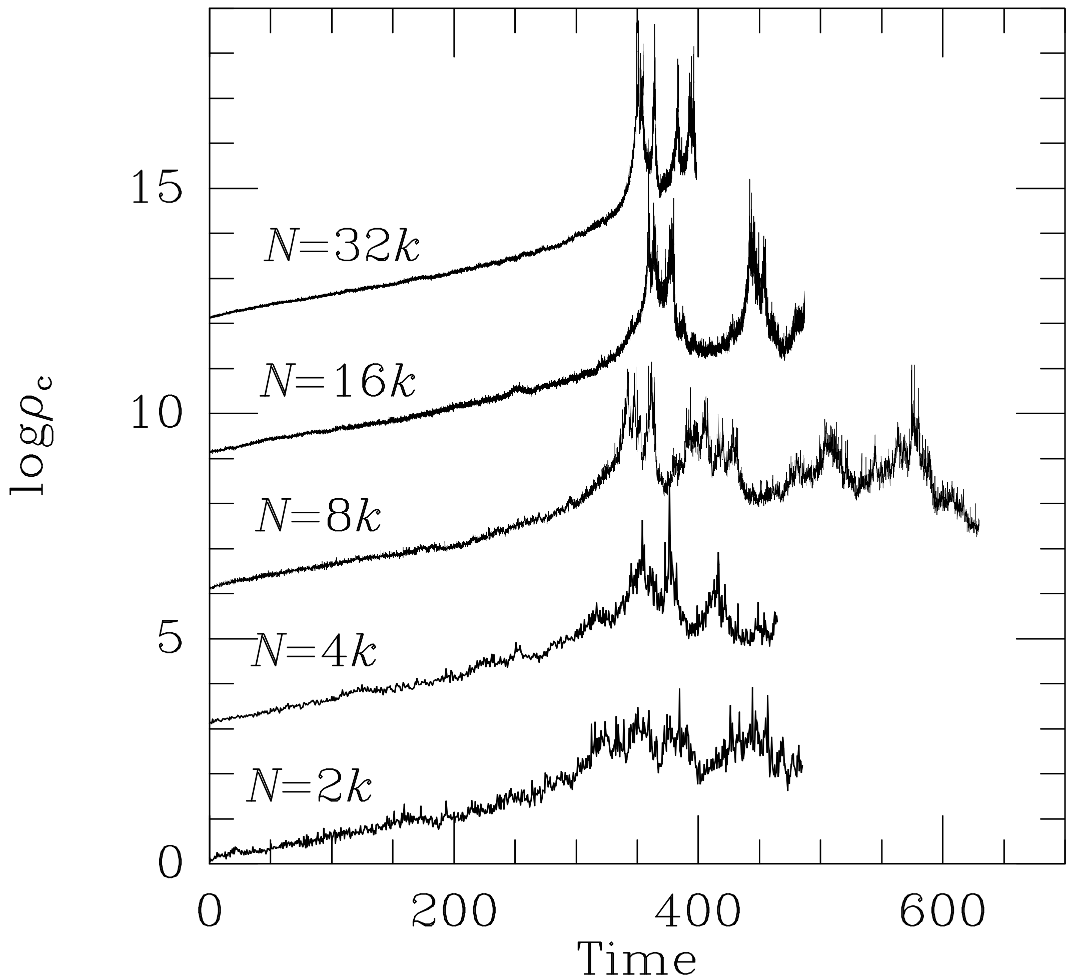
- 現実の系を、より少ない粒子数の系で置き換え
- 「衝突項」の大きさ (緩和時間) は変わる。統計的な振る舞いは同じはず？

「誤差」というより、もうちょっと面倒な違い: 2 体緩和以外の効果との関係

- 3 体相互作用による連星形成
- 星同士の物理的な衝突

粒子数によって振る舞いが変わる例

重力熱力学的振動



他の方法は？

　衝突項をなんとかすればボルツマン方程式は偏微分方程式。差分法では解けないのか？

- 空間 1 次元、等方速度分布:衝突項の積分は 3 次元。できる。
- 空間 1 次元球対称:　位相空間 2 次元。衝突項の積分は 4 次元。できる。
- 空間 2 次元軸対称:　位相空間 2 次元 $(f(E, J_z)$ を仮定$)$。うーん
- 空間 3 次元:　そもそも f が書けない、、、

2 次元と 3 次元の間に越えられそうにない壁

現実の系はどれくらい連続か — 星団

球状星団: 大雑把にいって 10^{5-6} 粒子、軌道周期 10^{5-6} 年。緩和時間 10^{8-10} 年。

- 形成初期を除いて 2 体緩和は重要
- 形成初期に重要な効果: dynamical friction

Dynamical friction

2 体緩和: 基本的に熱平衡、つまり運動エネルギー等分配に向かう。

軽い星と重い星が初期に同じ速度分布、空間分布をもっていたとすると、2 体緩和の効果で重い星はエネルギー失う

これを力学的摩擦 dynamical friction と呼ぶ。様々な系で、進化をドライブする重要なメカニズム

- 星団の中の重い星
- 銀河の中の、衛星銀河、星団、巨大ブラックホール
- 惑星形成過程での、微惑星やダスト、ガスの中の原始惑星

アニメーション

現実の系はどれくらい連続か — 銀河

- 軌道周期と粒子数の議論からは効かない
- 銀河円盤や、銀河中心: もうちょっと精度がある議論が必要
  - 銀河円盤: 密度高い、速度分散小さい
  - 銀河中心: 密度高い、中心ブラックホールの影響もある

緩和時間の書換え

速度変化が自分の速度 (まわりの速度分散) 程度になる時間:

$$t_\theta \sim \frac{v^3}{Gnm^2 \log \Lambda} \tag{8}$$

となる。

$\log \Lambda$ はクーロンロガリズムといわれる量。自己重力系だと $\log N$ 程度。

今、$\log \Lambda$ の質量依存性といったものを無視すると、散乱のタイムスケールは速度の 3 乗、数密度の逆数、質量の 2 乗の逆数に比例するということがわかったことになる。

銀河円盤の場合

- 速度分散: $50\mathrm{km/s}$ とか(回転速度の $1/5$ 程度)
- 密度: 球対称と思った時の数十倍(恒星ディスクの厚さ $500\mathrm{pc}$ くらい)

球対称として計算した時より 4 桁くらい短くなる。さらに、

- 巨大分子雲
- アーム構造自体

が星を散乱する。また、細かく分解できれば、星はおそらく全部最初は集団で、つまり星団としてできている。このような星団の緩和は銀河円盤の構造に大きな影響をもつかも

銀河円盤のシミュレーションの例

アニメーションa1

アニメーションa2

アニメーションb1

- 軸対称モードに対しては安定なはず (a1, a2)
- スパイラル構造ができる
- どんどん成長するわけでもないし、消えるわけでもない

ダークマターの構造形成

アニメーション1　アニメーション2

本当のダークマター: (現在の標準の λCDM)

- 何かわからないが素粒子。
- 密度ゆらぎの最小スケール: 地球質量くらい？

十二分に「無衝突系」(重力以外の相互作用という話も、、、)

シミュレーションは？

- 質量分解能: 現在の最高のもので 10^3 太陽質量
- 密度ゆらぎの最小スケール: 地球質量くらい？

従って:

- シミュレーションの最小スケールでは必ず 2 体緩和が効く。
- この影響はまだ本当には理解されていない (と思う)

まとめると、、、

2体緩和の影響	現実の系	シミュレーション
球状星団	あり	あり
銀河	?	??
ダークマター	なし	???

球状星団以外は良くわからない

「正しい」シミュレーション？

- 銀河: 星を全部表現すれば原理的には良い？
- ダークマター: ゆらぎのカットオフ周波数スケールの構造を無衝突系とみなせるくらい

銀河はそろそろできなくもない。ダークマターは本当にやるのは全然無理。

というわけで

重力多体系の研究の当面の課題:
十分に大きな粒子数で計算できるようになること
そのためには:

- 高速で
- 正確な

計算法、実装、その他もろもろ、、、
が必要

おしまい