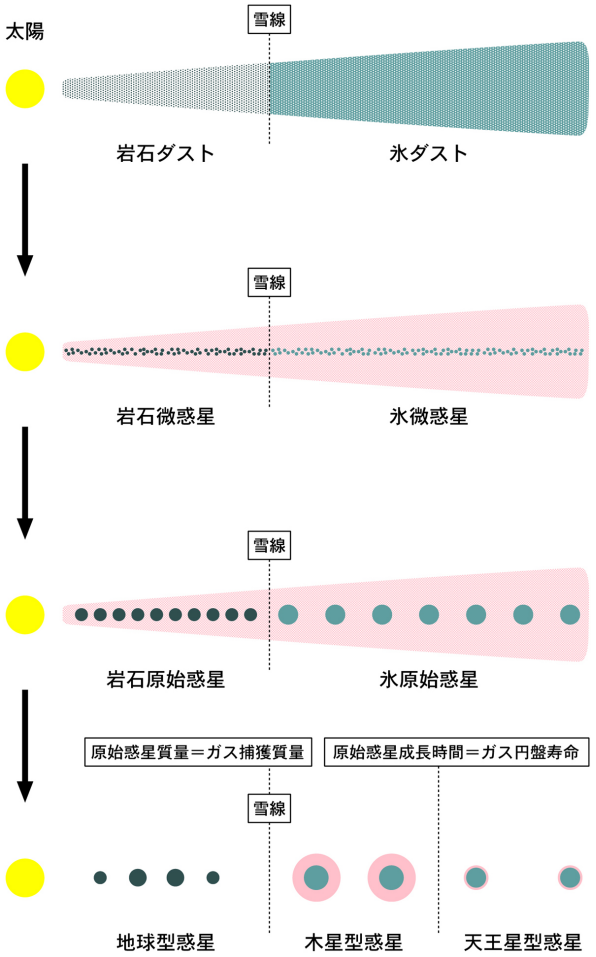
惑星集積過程の多体シミュレーション

牧野淳一郎
東工大大学院理工学研究科理学研究流動機構

今日の話の構成

- 標準的な惑星形成理論
- どのへんが問題か？
- 多体シミュレーション方法
- 新しい方法について

標準的な惑星形成理論



(理科年表から。小久保による)

- 太陽の周りに原始惑星系円盤。水素、ヘリウム＋それ以外。
- 太陽に近いところでは水は気体。外側は氷: 惑星材料の量が違う
- ダストは赤道面に沈降、集まって「微惑星」になる。($10^{18}g$ くらい)
- 微惑星同士がさらに重力相互作用で衝突・合体して「原始惑星」に (10 万年くらい？ $10^{26}g$ くらい)
- 原始惑星がさらに合体して地球型、あるいはガスを集めて木星型に

20年くらい前の状況

Hayashi, et al. 1985

- 微惑星から惑星へ、という基本的な描像は既にあった
- しかし、理論的には惑星ができるのに時間がかかりすぎる、という問題があった

何故時間がかかるということになっていたか？

- 惑星が成長すると成長速度が遅くなる (1/3 乗)
- 太陽から遠いと成長速度が遅くなる (3 乗)

海王星は存在しない (形成時間 100 億年以上)

形成時間問題への解

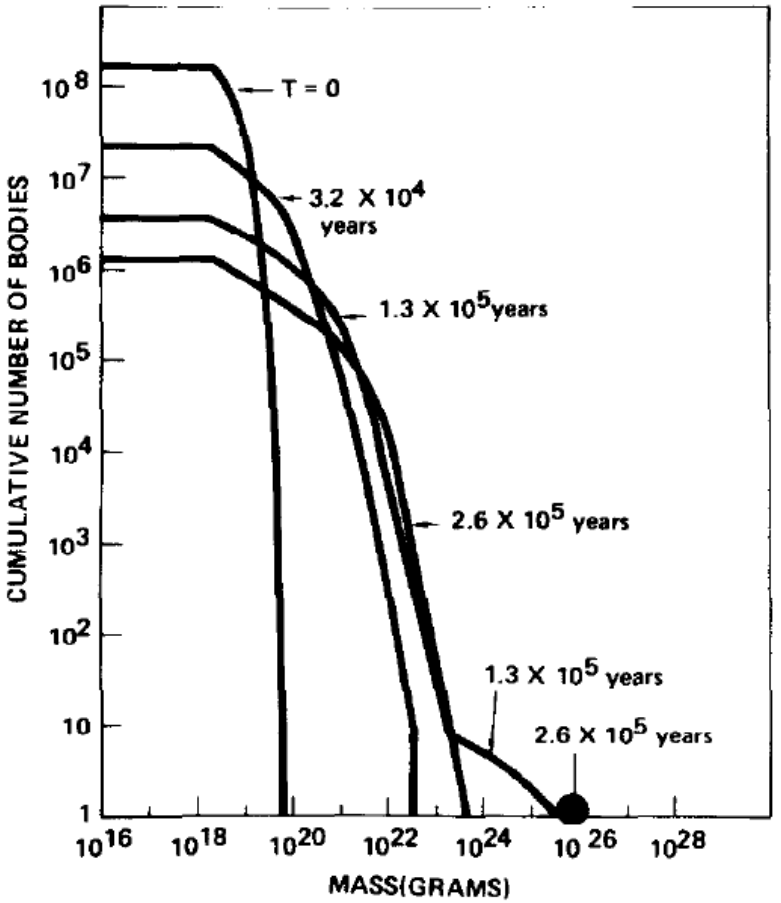
暴走的成長 (Wetherill and Stewart 1989)

- それまでの理解:秩序的成長。微惑星は同じように重くなる
- 暴走的成長: 周りよりも少し重くなったものが他より速く成長してどんどん大きくなる

速く成長する理由

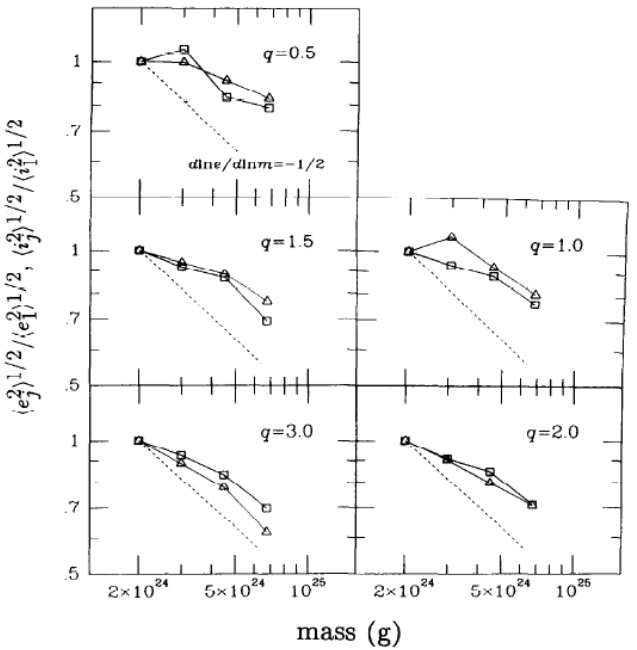
- 大きいので衝突断面積大きい
- 重いので、重力フォーカシングの効果も大きい
- ランダム速度が小さい (円軌道に近い) ので、重力フォーカシングの効果がさらに大きい

Wetherill and Stewart 1989



- 微惑星の質量分布の時間変化をモンテカルロ計算
- 衝突・合体の効果、速度分散等はモデル
- 水平方向空間分布は「一様」
- 最初深いべき $(-2.5$ 乗くらい$)$ の質量分布ができて、そこからさらに重いものができる

Ida and Makino 1992a,b, 1993



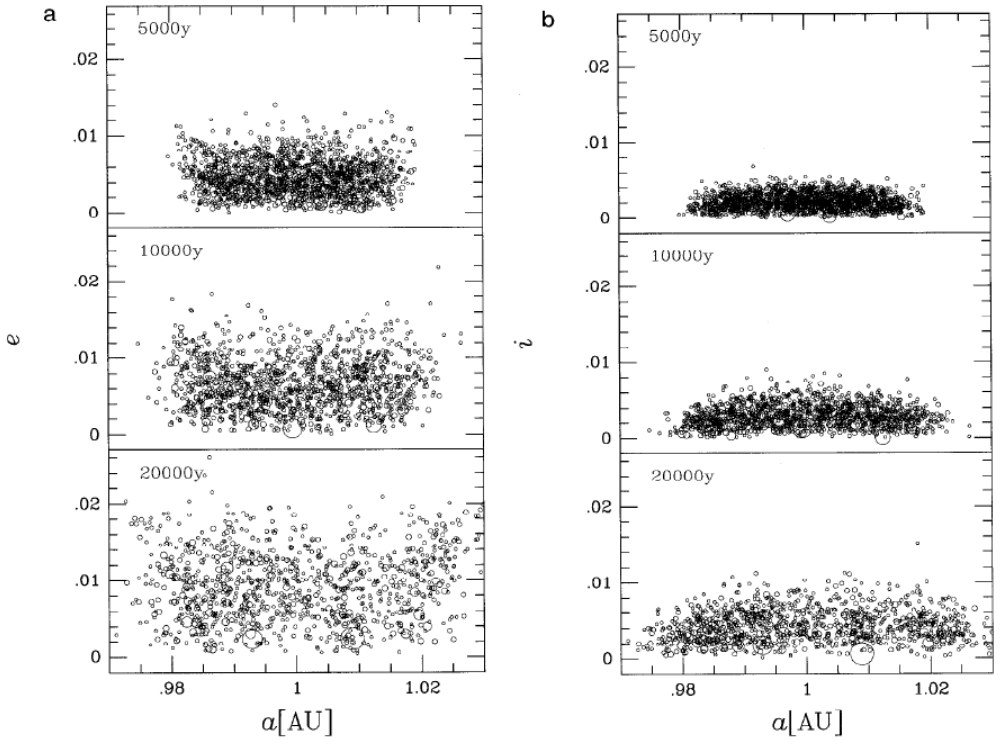
(私の名前は論文にはいってるけど全部井田さんの仕事、、、)

- (1992a) 単一質量での速度分散の時間進化を N 体計算
- (1992b) 複数質量での速度分散の質量依存性を計算
- 重いものが速度分散小さくなることを確認

(1993) 暴走的成長には限界があることを指摘。ある程度重くなると、自分自身が周りの微惑星の速度分散を大きくするので成長できなくなる(=原始惑星)

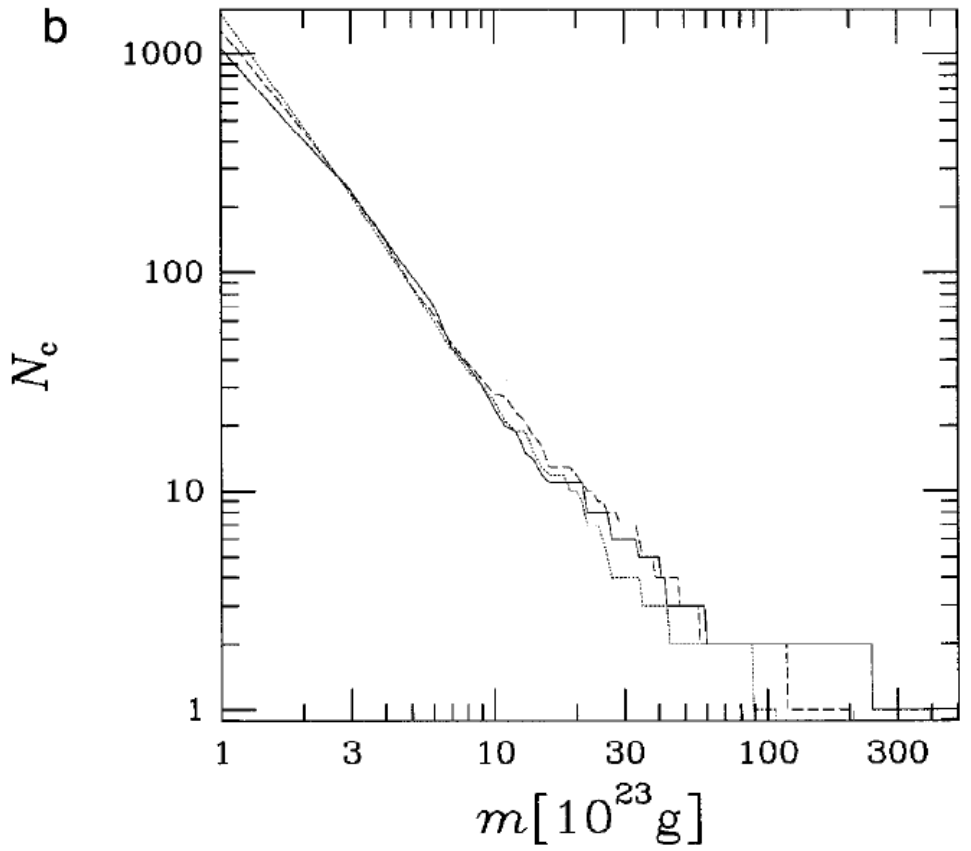
実は実際の合体・成長過程を N 体計算で調べてはいない

Kokubo and Ida 1996



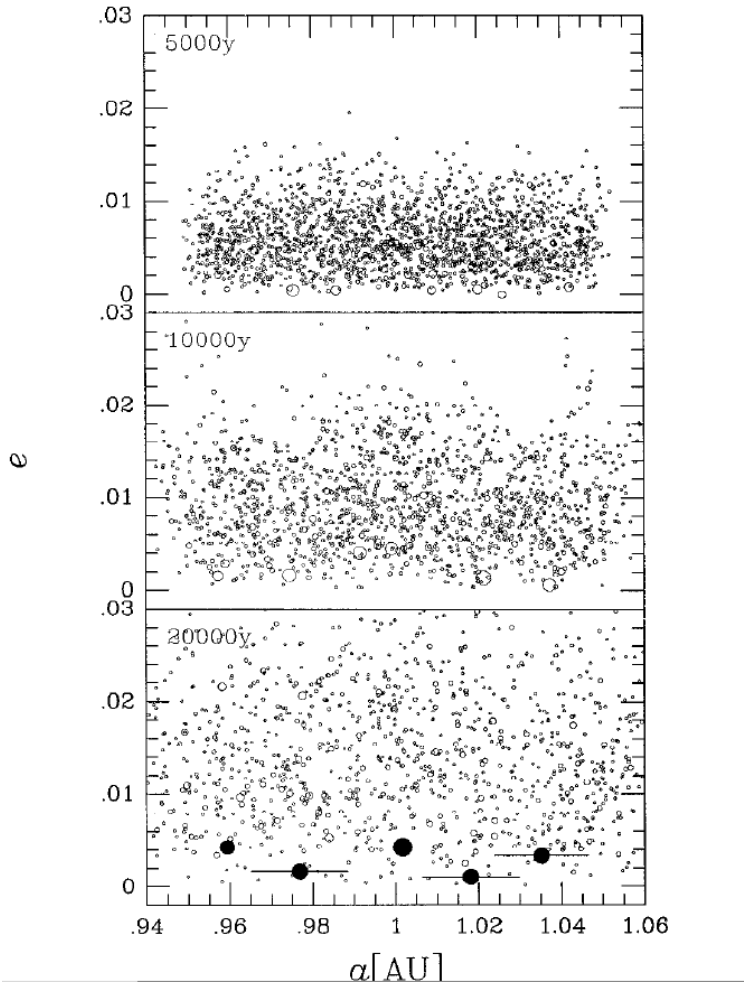
- 細いリング状領域の N 体計算、衝突・合体も扱う
- 衝突の時間スケールは惑星大きくして短く
- 暴的成長が起きることを確認

累積質量分布



- 等質量だったものが累積質量では $n \propto m^{-1.5}$ にまず進化
- もっとも重い一つがさらに成長
- 基本的に、Wetherill and Stewart 1989 の結果を確認

寡占的成長



- Kokubo and Ida 1998
- 少し広い領域を計算
- ほぼ同じ質量の原始惑星がほぼ等間隔に並ぶ (大体 10 ヒル半径)
- 大雑把には、10 ヒル半径の質量を集める、ということで原始惑星の質量が決まる。

暴走的成長＋寡占的成長

- 形成時間の問題 (特に木星型) を解決 (?)
- 地球型惑星: 原始惑星からさらに作らないといけない
  - 少数多体問題。理論的理解も計算も難しい
  - 普通にやると、地球が作れないわけではないが現在のような離心率の小さい状態にはなかなかならない
  - 色々なモデルが提案されている

問題は形成時間だけ？

実はなんとか問題というのは他にもある

- ダスト落下問題 (微惑星形成問題)
- 惑星落下問題

ダスト落下問題

- ダストは最初は小さい。これが原始太陽系星雲の中で衝突・合体で成長していくと考えると、途中の 1 メートルくらいになったところでガスの抵抗でエネルギー、角運動量を失って、太陽のほうに落ちてしまう。
- 落ちないようにするのが、「自己重力不安定モデル」。合体とかする前に赤道面に薄い層を作り、それが自己重力で一気に分裂、いきなりキロメートルサイズになるとする。
- 静かに赤道面につもるのは無理 (乱流が起こるはず) という批判あり
- ガス抵抗は普通の流体力学的抵抗

未解決の問題

惑星落下問題

- 微惑星が原始惑星に成長していく途中で、やっぱりガスの抵抗でエネルギー、角運動量を失って、太陽のほうに落ちてしまう。
- 落ちないようにする都合の良いモデルもあまりない
- ガス抵抗は重力相互作用によるもの。

これも未解決

何故未解決か？

もちろん、未解決なので何故かわからない。

と、いってしまってはしょうがない。

形成時間問題では？(後知恵で見ると、という話)

- みんなそろって大きくなる、という仮定が全然嘘だった
- が、その仮定に問題がある、とは多くの人は思ってなかった

ダスト落下問題ではどうか？

- ダスト成長時間スケール、落下時間スケールのどちらも、かなり単純なモデルによる理論的見積もり
- 実際に基礎過程からシミュレーションしたわけじゃない
- 理由：どうやって基礎過程からシミュレーションできるのか？だから

惑星落下問題は？

- ガス抵抗をいれた N 体計算はいくつかあり
- ガス円盤自体は解かない。抵抗を式でいれる
- なので、どうしても落ちる
- 惑星一つとガス、という計算もあり。これはやはり落ちる

と、ここまでが長い前置き

ではどうするか？という話。

- 惑星落下問題: ガス円盤の中での微惑星成長を完全にself-consistentに扱わないと、何が本当かはわからない
- 完全に self-consistent
  - ガス円盤自体の力学、個々の微惑星とガスの相互作用を流体の方程式を解いてだす
  - 微惑星自体の進化についても、衝突による破壊とかもいれて全体の分布をちゃんと解く

要するに、極めて力任せなアプローチが必要

力任せなことをやってない理由=力が足りないから

何故、どれくらい力が足りないか

- Kokubo and Ida 1999: 4000 粒子、2 万年 (GRAPE-4)
- 計算量は (粒子数)^2 $\times$ (年数)
- 例えば 100 万体には 4 万倍速い計算機必要。GRAPE-DR でもそこまで速くない

というわけで、ガスがどうこうという以前に破壊の効果を扱うのすら困難
もうちょっと速く計算できないか、というのがここからの話。

数値計算の方法等

この種の問題：基本的に

- より大粒子数で
- より正確な

計算をすることで、「新しいことがわかる」（こともある）。

↓

どうやって今までより「良い（大きく、正確な）」計算ができるようにするかが問題

「良い」計算をする方法

基本的な事実: 速く計算できればそれだけ良い計算が可能になる。(例は時間に余裕があればいくつかあげたい)
それしか方法がないわけではないが、「速く計算できるようにする」のは極めて重要な方法。

- **計算法を改良する (今日の本題)**
- **速い計算機を買う**
- **速い計算機を作る**

計算法

原理的には、多体シミュレーションはとっても単純：
運動方程式

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} G m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3}, \tag{1}$$

を数値積分するだけ。

右辺を計算するプログラム： 2 重ループで 10 行くらい
時間積分： なにかルンゲクッタとか適当なものを使えばいい

というだけで話が済めばいいけれど、もちろん世の中はそんなに簡単ではない。

何が問題か？

- 計算精度の問題： 2 粒子の近接散乱、自己重力による構造形成 — 時間刻みをどんどん短くしないとちゃんと計算できなくなる。
  積分時間が長いので高精度の公式を使いたい。
- 計算量の問題： 右辺の計算量が $O(N^2)$ — N が少し大きくなるとすぐに計算時間が現実的ではなくなる

というわけで、どんな方法を使っているかという話を簡単に。

計算法 — 時間領域

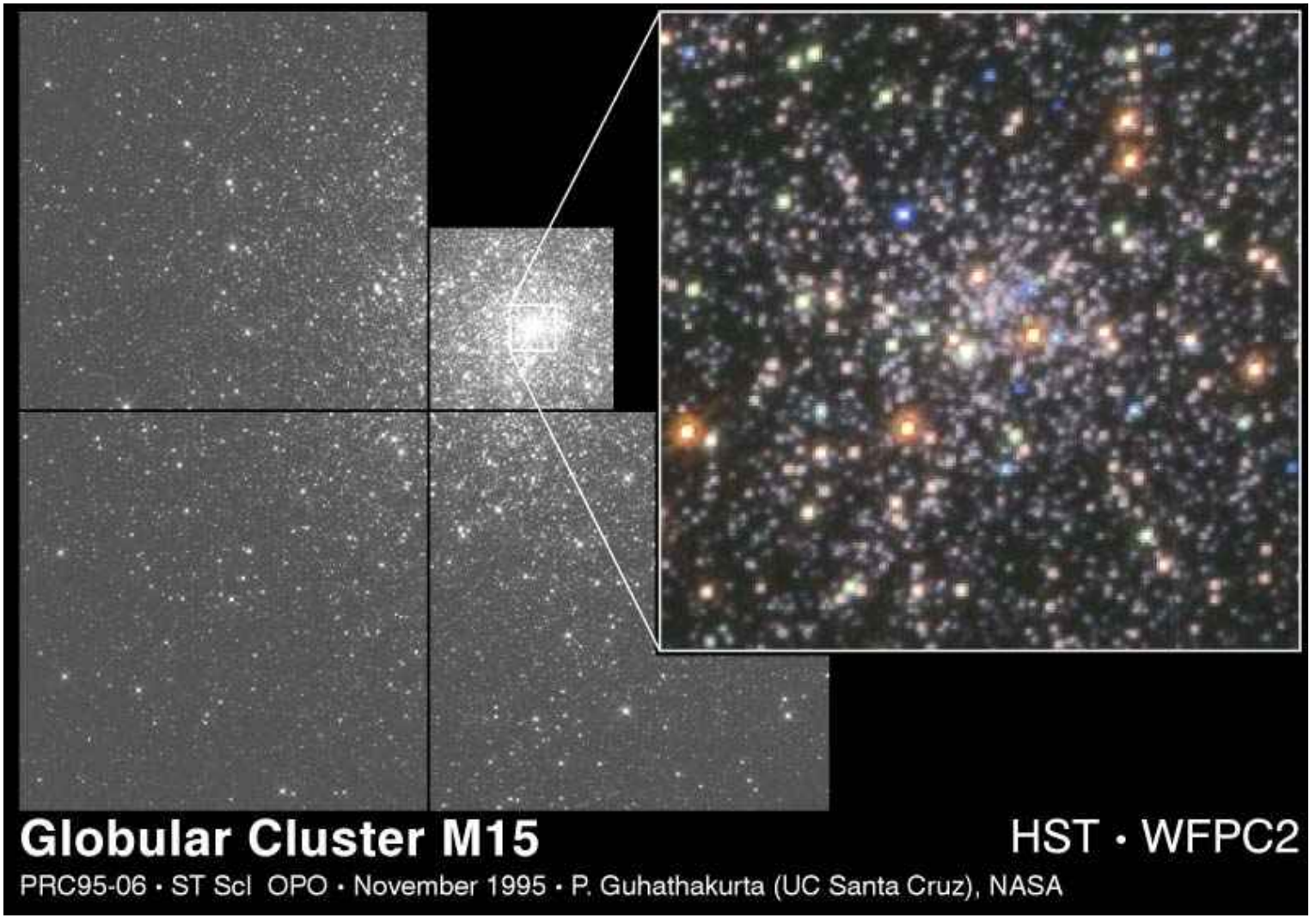
算数としては、単に常微分方程式の初期値問題の数値解。
ナイーブに考えると、いろんな公式がライブラリであるので、それを使えば済みそうな気がする。
それだけでは済まないのが問題。
済まない理由:

- 粒子によって非常に大きく軌道のタイムスケールが違うことがある
- 連星とかそういったものができる

軌道タイムスケールの問題

- 構造形成による効果 (惑星形成ではあまり関係ない)
- 一様な系でも起きる問題

構造形成による効果: 球状星団の例



構造形成による効果 (続き)

- 「コア崩壊型」星団 — 星の数密度が中心までべき (半径の -1.8 乗) で増加
- 中心にブラックホールがある？

星の運動のタイムスケール: 中心に近いほど短くなる。
等温カスプ (密度が半径の -2 乗に比例): タイムスケールの分布がべき乗になる。

一様な系でも起きる問題

重力が引力であるために確率的には 2 つの粒子がひじょうに近付くような近接散乱が起こる
インパクトパラメータが 0 に近い 2 体衝突: 非常に短い時間刻みが必要
これは重力多体系特有の問題: 相互作用が引力で、しかも距離 0 で発散するため。
例えば分子動力学計算ではこういう問題はおこらない。

計算量への影響

単純な可変時間刻みでは計算量が大きくなりすぎる。

理由: どちらの場合も、タイムステップの分布がべき乗的なテイルをもつようになる。

粒子数が増えるに従って、タイムステップが短くなる。
構造形成の効果: 最悪 $O(N^{1.3})$
2 体衝突の効果: $O(N^{1/3})$ 程度

対応:

- 粒子毎に時間刻みをバラバラに変化させる。(独立時間刻み)
- 2 体衝突、連星は座標変換して扱う。

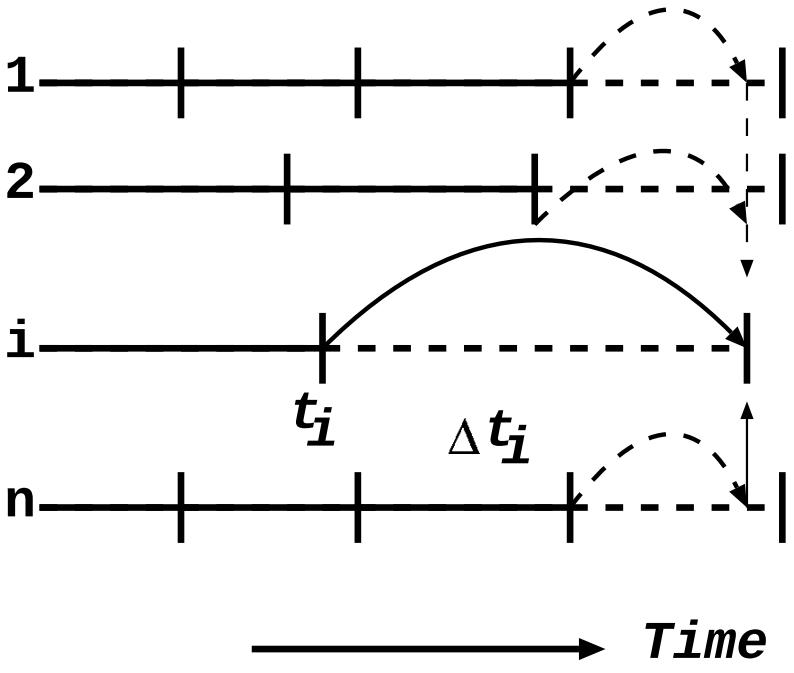
独立時間刻みの原理

粒子毎にばらばらの時刻 t_i と時間ステップ Δt_i を与える

1. $t_i + \Delta t_i$ が最小の粒子を選ぶ。
2. その粒子の軌道を新しい時刻まで積分する。
3. その粒子の新しい時間刻みを決める。
4. ステップ 1 に戻る。

ある粒子の時刻 $t_j + \Delta t_i$ で他の粒子の位置が高精度で必要:
予測子・修正子型の公式を使う。

独立時間刻み



(Aarseth 1963)

- 各粒子にそれぞれ時刻と時間刻みを与える
- 「イベント駆動」時間積分 — $t_i + \Delta t_i$ がもっとも小さい粒子が積分される

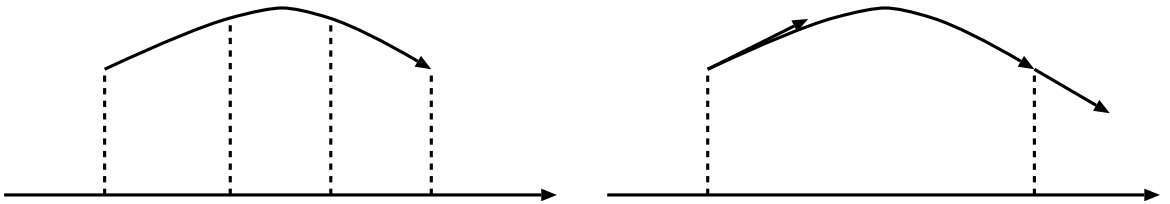
時間積分公式に対する要請

- 高次の予測子が必要 (他の粒子の位置が必要)
- 可変時間刻みが必要
- 積分区間の途中で加速度を計算するような方法は使えない。
  - 線形多段階法は使える
  - ルンゲ・クッタは使えない
  - シンプレクティック法は単純には使えない

時間積分公式

次数：「4 次くらいが適当」(JM 1990)。
もっと高いほうが良い: (Nitadori and JM 2007)

- Aarseth scheme (Aarseth 1963): **可変刻みのアダムス法、** PEC **モード、4 次、2 階の方程式用。**
- Hermite scheme (JM 1990): **ラグランジュ補間（ニュートン補間）の代わりに、加速度の一階時間導関数も使ってエルミート補間を構成。**



高次エルミート

Nitadori and JM 2007

- 2 階導関数まで直接計算してエルミート補間: 6 次公式
- 3 階導関数まで直接計算してエルミート補間: 8 次公式
- 予測子は前のステップの値を使って構成

以下ちょっとシンプレクティック公式の話

「良い」公式の古典: 2 次 leap frog

昔からいろんな業界で使われていて、名前が違う、、、

- leapfrog
- Verlet
- 2nd order ABM
- 2nd order Stömer-Cowell

他にも 4 個くらい名前があったような。

leap frog 公式

$$v_{i+1/2} = v_{i-1/2} + \Delta t a(x_i) \tag{2}$$
$$x_{i+1} = x_i + \Delta t v_{i+1/2} \tag{3}$$

ここで、添字はステップである。$\pm 1/2$ は中間点での値ということになる。
出発用公式として

$$v_{1/2} = v + \Delta t a(x_0)/2 \tag{4}$$

を使い、さらに終了用公式として

$$v_i = v_{i-1/2} + \Delta t a(x_i)/2 \tag{5}$$

を使う

別の表現

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t v_i + \Delta t^2 a(x_i)/2 \quad (6)$$
$$v_{i+1} = v_i + \Delta t [a(x_i) + a(x_{i+1})]/2 \quad (7)$$

こう書くと PC 法みたいに見える。また、以下のようにも書ける

$$v_{i+1/2} = v_i + \Delta t a(x_i)/2 \quad (8)$$
$$x_{i+1} = x_i + \Delta t v_{i+1/2} \quad (9)$$
$$v_{i+1} = v_{i+1/2} + \Delta t a(x_{i+1})/2 \quad (10)$$

これは一見なんだか良くわからない。さらにまた、速度を消去して x_{i-1}, x_i, x_{i+1} の関係式の形で書いてあることもあるかもしれない。

leap frog の性質

普通にいう 2 次精度である。
局所誤差という観点からはこれは決して良い公式というわけではないが、現実にはこの公式は非常に広く使われている。
実際、非常に「良い」例えばエネルギーや角運動量のような保存量が非常によく保存するということである。これらの保存量については多くの場合に誤差がある程度以上増えない。

1. リープフロッグはシンプレクティック公式 のもっとも簡単なものの一つである。
2. リープフロッグは対称型公式 のもっとも簡単なものの一つである。

シンプレクティック公式の性質

1. シンプレクティック公式は、すくなくともある種のハミルトニアンに対して使った場合に、それに近い別のハミルトン系に対する厳密解を与えることがある。
2. 周期解を持つハミルトン系に対して使った場合に、どんな量でも誤差が最悪で時間に比例してしか増えない。
3. 時間刻を変えると上のようなことは成り立たなくなる

対称型公式の性質

1. 周期解を持つ時間対称な系に対して使った場合に、どんな量でも誤差が最悪で時間に比例してしか増えない。
2. 時間刻を変えてもうまくいくようにすることも出来る。

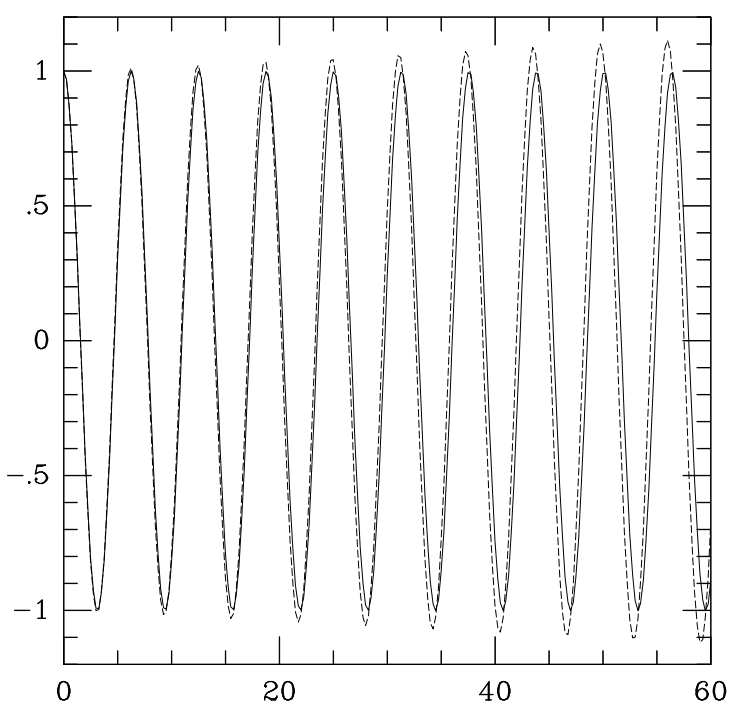
数値例

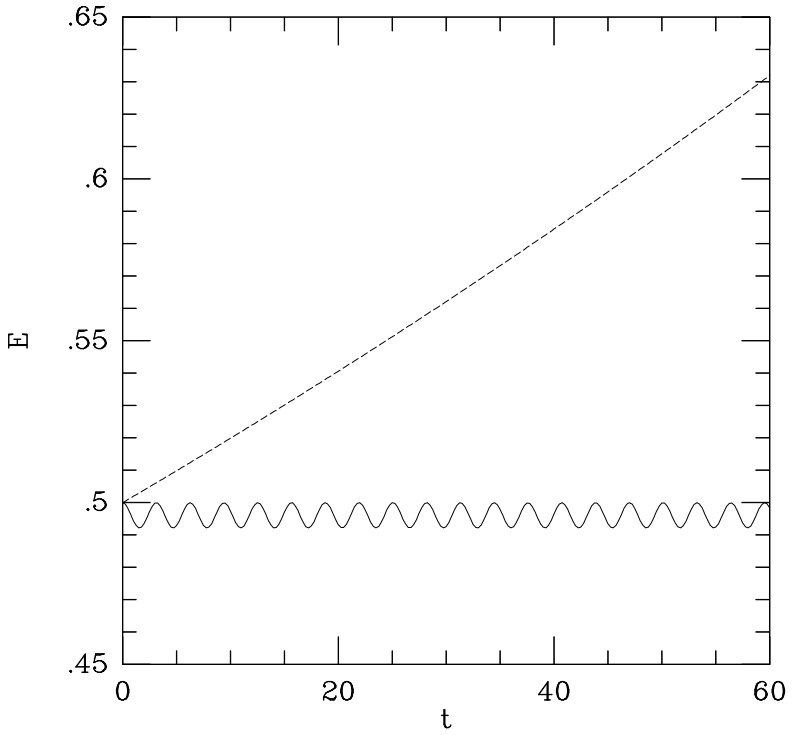
調和振動子

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \tag{11}$$

を リープフロッグ と 2階のルンゲクッタで解いてみる。初期条件は $(x, v) = (1, 0)$ で、時間刻みは $1/4$ である。

軌道とエネルギー





保存量

この調和振動子の場合には、リープフロッグ公式は以下の量

$$H' = \frac{1}{2}(x^2 + v^2) - \frac{h^2}{4}x^2 \tag{12}$$

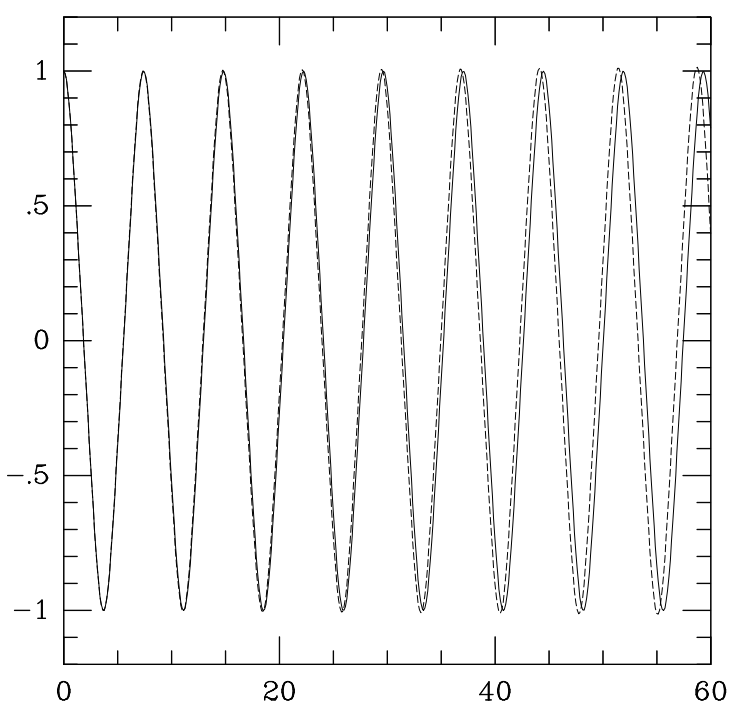
を保存する。
つまり、微妙に浅いポテンシャルでの調和振動子になっている。
$h > 2$ になるとポテンシャルが下に凸でなくなる。
これは、安定でなくなる (差分方程式の固有の絶対値が 1 でなくなる) のと一致している。

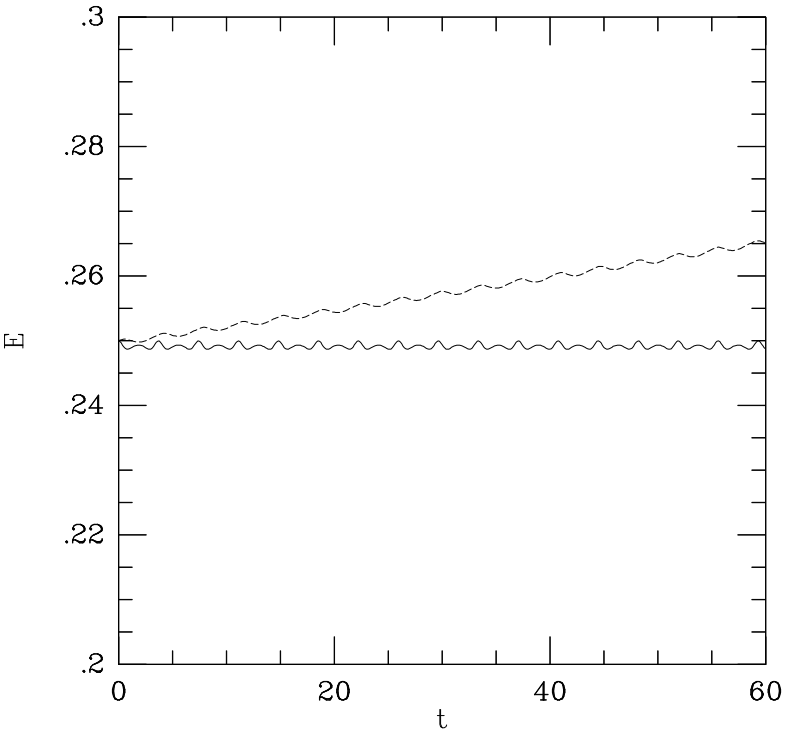
非線形振動

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x^3 \tag{13}$$

をリープフロッグと 2 階のルンゲクッタで解いてみる。初期条件は $(x, v) = (1, 0)$ で、時間刻みは $1/8$ である。

軌道とエネルギー





シンプレクティック公式

リープフロッグ 公式は、良いけど低次。
もっと高次の方法は?

そういうのを作る一つのアプローチ:シンプレクティック公式

シンプレクティック写像:要するに正準変換
リープフロッグ公式はシンプレクティック性を満たしている
これを時間刻みを変えて組合せたものもシンプレクティック性を満たしている

高次の公式

吉田や鈴木による作用素分解に基づく公式が良く知られていて、広く使われている。
これらの方法の原理:

- リープフロッグをタイムステップを変えていくつか組合わせる。
- うまくタイムステップを組み合わせると誤差の高次の項を消すことができる

7 段 6 次や 15 段 8 次の公式等が吉田春夫 (国立天文台) によって導かれている。

シンプレクティック公式の意味

シンプレクティックであるということと、「良い」ということの間の関係はなにか?
あるハミルトニアン H で表される系をシンプレクティックな p 次の公式を使って積分した解は、別のハミルトニアン H' で与えられるシステムの厳密解になっていて、H と H' の間に

$$H = H' + h^{p+1} H_p + O(h^{p+2}) \tag{14}$$

という関係がある（H' を求める数列が収束すれば）ということがわかっている。
(収束するかどうかは一般には明らかではない)

シンプレクティック公式と可変時間刻み

適当に時間刻みを変えると上手く働いてくれない (エネルギーとか保存しなくなる)
以下のような考えかたでの研究が進められている。ハミルトニアン H を

$$H = H_1 + H_2 + \cdots \tag{15}$$

と複数の項の和にわけ、それぞれについて違う時間刻みを与えることで実効的に時間刻みを変える。

局所誤差

シンプレクティック公式は 1 段法:局所誤差に対する計算量という観点からは線形多段階法に比べて必ず悪い
普通の (誤差を小さくした) ルンゲ・クッタに比べても驚くほど悪い
例:8 次の公式
15 段の吉田による公式の誤差の係数は、2 階の問題に最適化された非シンプレクティックな Dormand らによる 9 段公式（実質 8 段 8 次）の 10^4 倍
同じ計算時間での局所誤差は 100 万倍

局所誤差の小さい公式

陰的ガウスはいろいろな意味で「最適」な公式であり、局所誤差も極めて小さい。
直接代入で収束させても、他の方法より速いという実験結果もある。

MVS公式等

「ハミルトニアンの分離」の考え方を、主要なハミルトニアン+摂動の系(例えば摂動があるケプラー問題) に適用する。
リープフロッグとの基本的な考え:

$$H = T(p) + V(q) \tag{16}$$

に対して、p に対する以下の変換

$$p \leftarrow p - \Delta t \frac{\partial H}{\partial q} \tag{17}$$

と q に対する同様な変換がそれぞれシンプレクティックなので、それらを順番に適用したものもシンプレクティックになるというもの。

摂動ケプラー問題

摂動をうけたケプラー問題のハミルトニアン:

$$H = T(p) + V_1(q) + V_2(q) \tag{18}$$

惑星系なら V_1 が太陽からの重力で、 V_2 は自分以外の惑星からの寄与。このとき

$$H_1 = T(p) + V_1(q) \tag{19}$$

の解はそれ自体シンプレクティックであり、また V_2 だけを考えた

$$p \leftarrow p - \Delta t \frac{\partial V_2}{\partial q} \tag{20}$$

というマッピングもシンプレクティックである。従って、この 2 つを組み合わせて積分公式をつくることができる。

解釈

リープフロッグ: $x \leftarrow x + \Delta t v$ **と直線で動かす**
MVS: **ポテンシャル** V_1 **に沿って動かす**

ケプラー問題は解析的に解けるので、このようなやり方で太陽中心の軌道を極めて高精度に積分できる。

実用的にこの方法を使うためには、ケプラー問題を高速に解く方法が必要になる。これは、実空間でまともに解く方法と、 KS **変換した座標系で解く方法のそれぞれで極めて高速に解ける方法が提案されている。**

計算法 — 空間領域

運動方程式の右辺をどうやって評価するか？という問題。

以下、独立時間刻みのことはとりあえず棚上げにして話をすすめる。

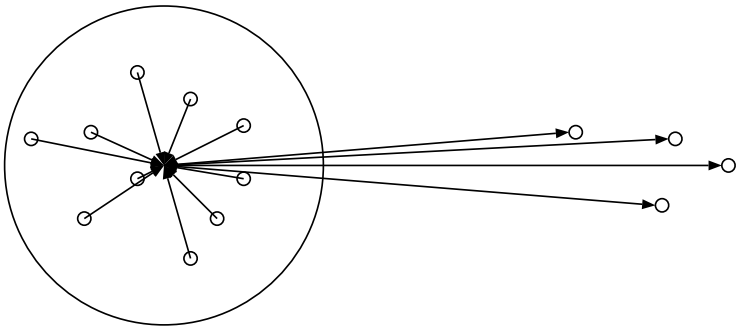
広く使われている方法： Barnes-Hut treecode
有名な方法： 高速多重極法

ツリー法、FMMの基本的発想

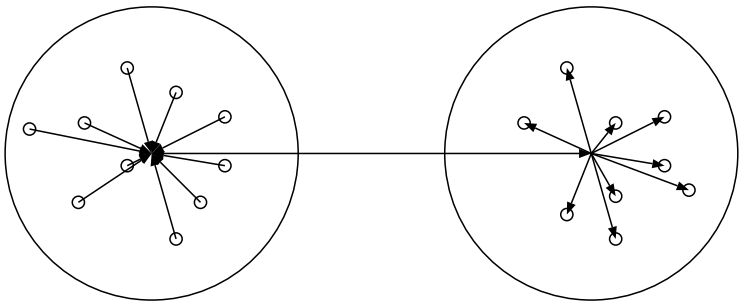
遠くの粒子からの力は弱い

↓

まとめて計算できないか？



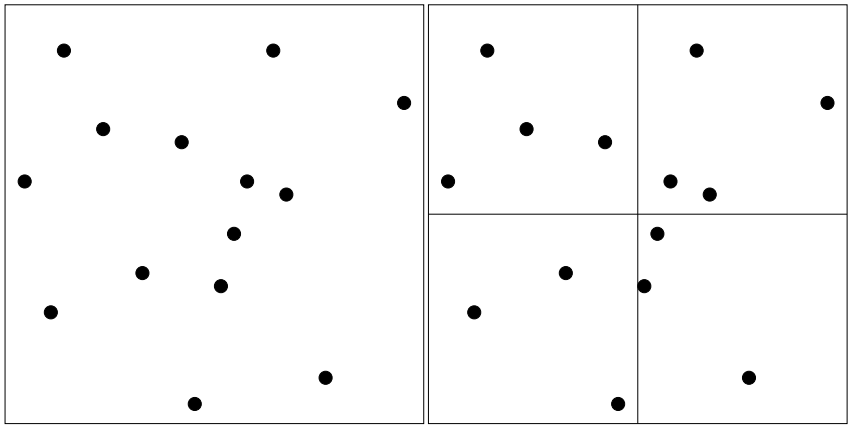
Tree



FMM

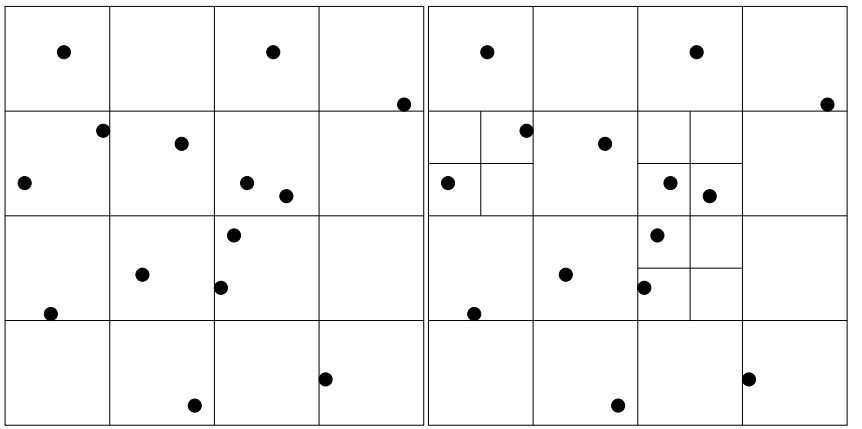
- ツリー：力を及ぼすほうだけをまとめて評価
- FMM：力を受けるほうもまとめて評価

どうやってまとめるか？ — ツリー法の場合



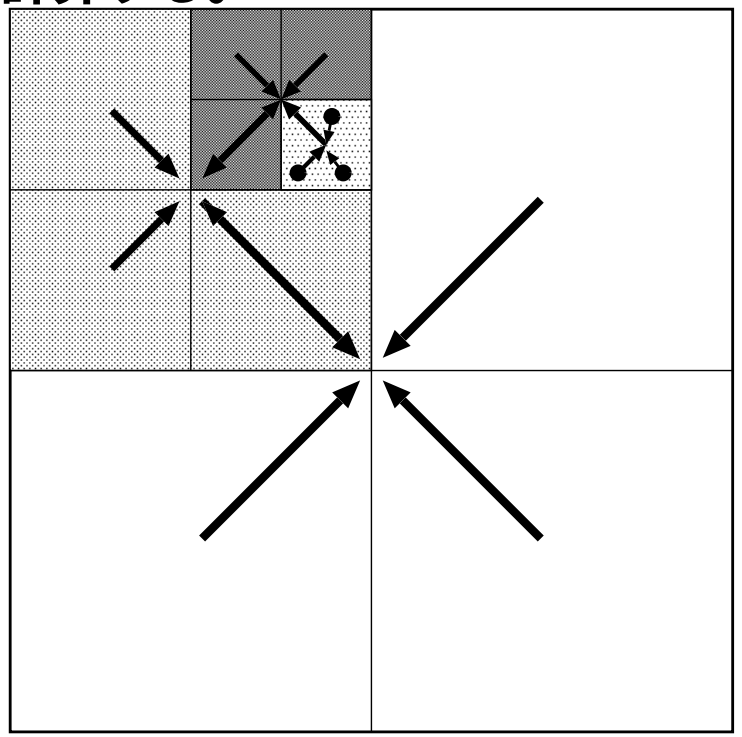
階層的なツリー構造を使う。

- まず、全体が入るセルを作る
- それを再帰的に 8 (2 次元なら 4) 分割する
- 中の粒子がある数以下になったら止める（上の例では 1 個）



多重極展開の構成

まず、ツリーの各セルのなかの粒子がつくるポテンシャルの多重極展開を計算する。

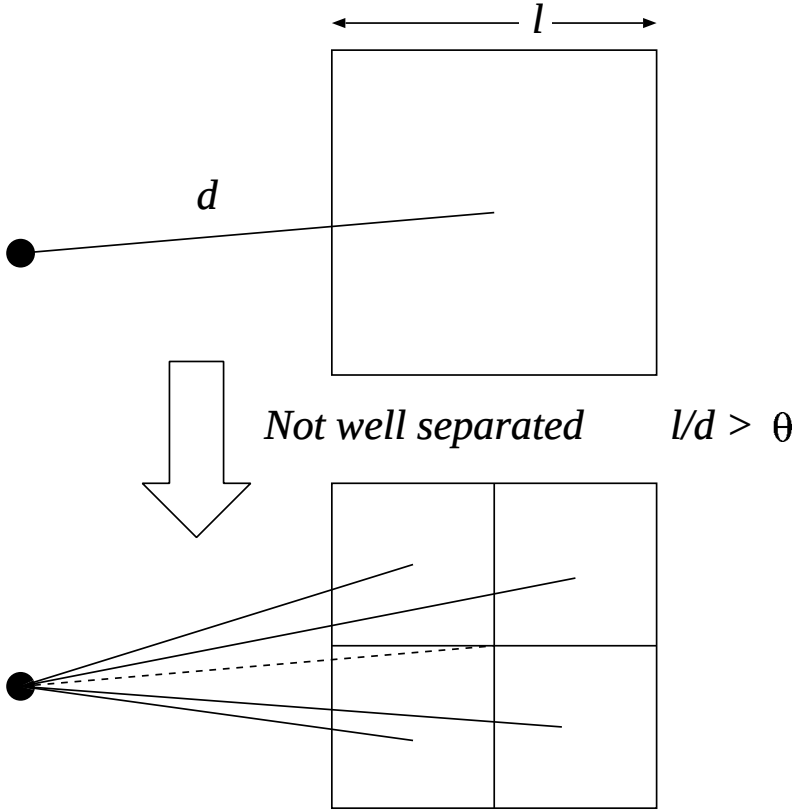


- 最下層のセル:そのなかの粒子が作るポテンシャルを多重極展開
- それ以外：子セルの多重極展開の展開中心をシフトして加算

下から順に計算していけばよい。
計算量は $O(N)$。展開をシフトする式はかなり複雑。

ツリー法での力の計算

再帰的な形に表現すると格好がいい。



- **十分に離れている：重心（あるいは多重極展開）からの力**
- **そうでない：子ノードからの力の合計**

系全体からの力 ＝ ルートからの力

ツリー法の効果

- 計算量のオーダーが $O(N^2)$ から $O(N \log N)$ に減る。
- 現状では、例えば天文台の $\mathrm{Cray}\ 1024$ コアを使って 2048^3 粒子が 1 ステップ数分とか。
- もしも直接計算したら 1 ステップ数十年かかる。

独立時間刻みとツリー法の組合せ

- 原理的にはこれが望ましいに決まっている
- 研究も昔からある。McMillan and Aarseth 1993 とか
- (牧野は 1987 年あたりに色々やったけど論文書いてない)
- あまり上手くいっていない

問題点:

- 現在の殆どの実装は、一番短いステップ毎にツリーを作り直す。そうすると、ツリーを作る時間が全部になって速度があがらない。
- 部分的にツリーを作り直すとかも試みられているが、特に並列化と組み合せるとコードが複雑になりすぎて手に負えない。

並列化向けのアプローチ

ここ数年で色々ごまかす方法を考えた。

- **BRIDGE scheme (Fujii et al. 2007)**
- **もうひとつ別 (Oshino et al. 2011)**

BRIDGE

銀河系の中を運動する星団。
銀河内、銀河と星団の相互作用:ツリー、星団内:正確に、という方法
MVS (混合変数シンプレクティック) に類似

単純な陽的シンプレクティック: ハミルトニアンを運動エネルギーとポテンシャルに分解、交互に積分
MVS: 惑星の運動を、太陽の回りのケプラー運動とそれ以外の相互作用に分解。

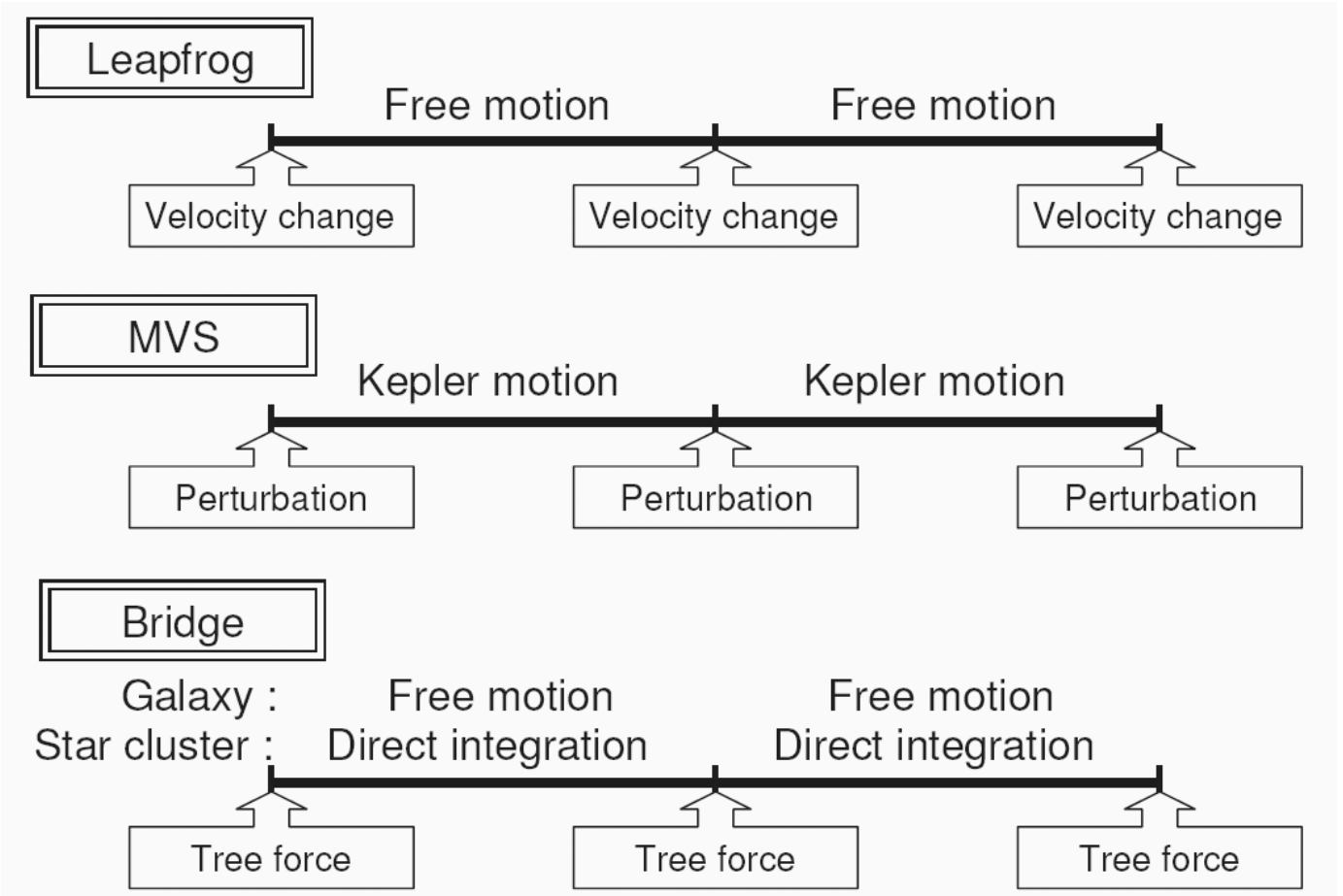
我々の方法:ハミルトニアンを

- 運動エネルギーと星団内ポテンシャル
- それ以外のポテンシャル

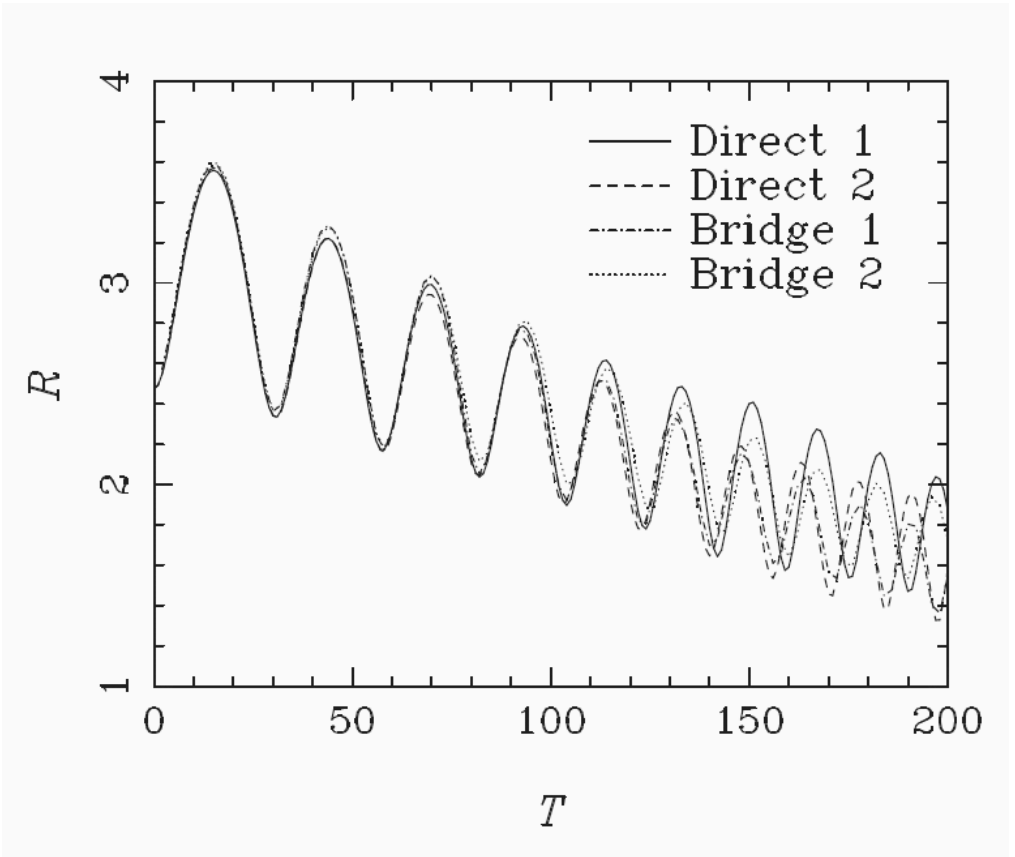
に分解、前者を (シンプレクティックでない) 独立時間刻みで高精度に積分

BRIDGE (Bridge is for Realistic Interactions in Dense Galactic Environment)

How does it work?



Test result



- $N = 100\text{k} + 2\text{k}$
- Similar model as in Fujii et al. 2996
- Two runs: different random seeds
- Results agree well.
- Energy error: dominated by the parent galaxy.

もうひとつの方法

BRIDGE は銀河+星団 1 つだと素晴らしく上手くいくが、限界もある

- 星団複数だと計算大変
- 実際に銀河の中で星団が生まれてくるような現象には使いにくい

というわけで、

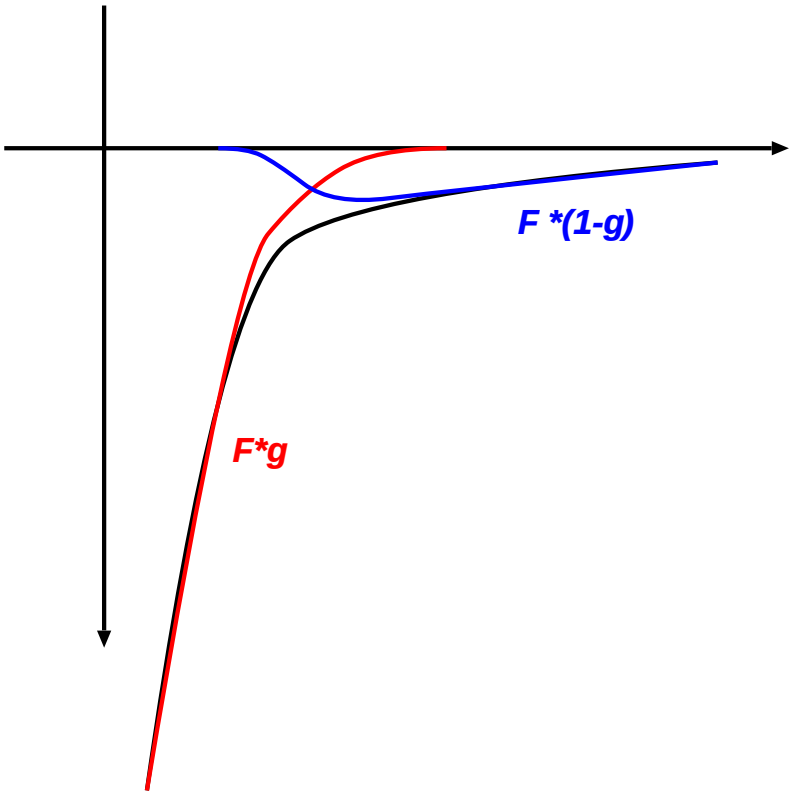
- 粒子の種類によってではなく、距離でわけたらどうか？

具体的には

2 粒子間の重力を形式的に 2 つのタームに分ける。

$$F_{ij} = -Gm_i m_j \frac{r_{ij}}{|r_{ij}|^3} = F_{ij}(1 - g(|r_{ij}|) + F_{ij}g(|r_{ij}|)$$

こんな感じに分解



- $F * g +$ 運動エネルギー を独立時間刻みで高精度に積分
- $F * (1 - g)$ はツリー+リープフロッグで積分 (こっちはシンプレクティック)
- g はコンパクトサポートで、積分公式に必要な回数だけ微分できる必要あり (スプラインを使う)

実装

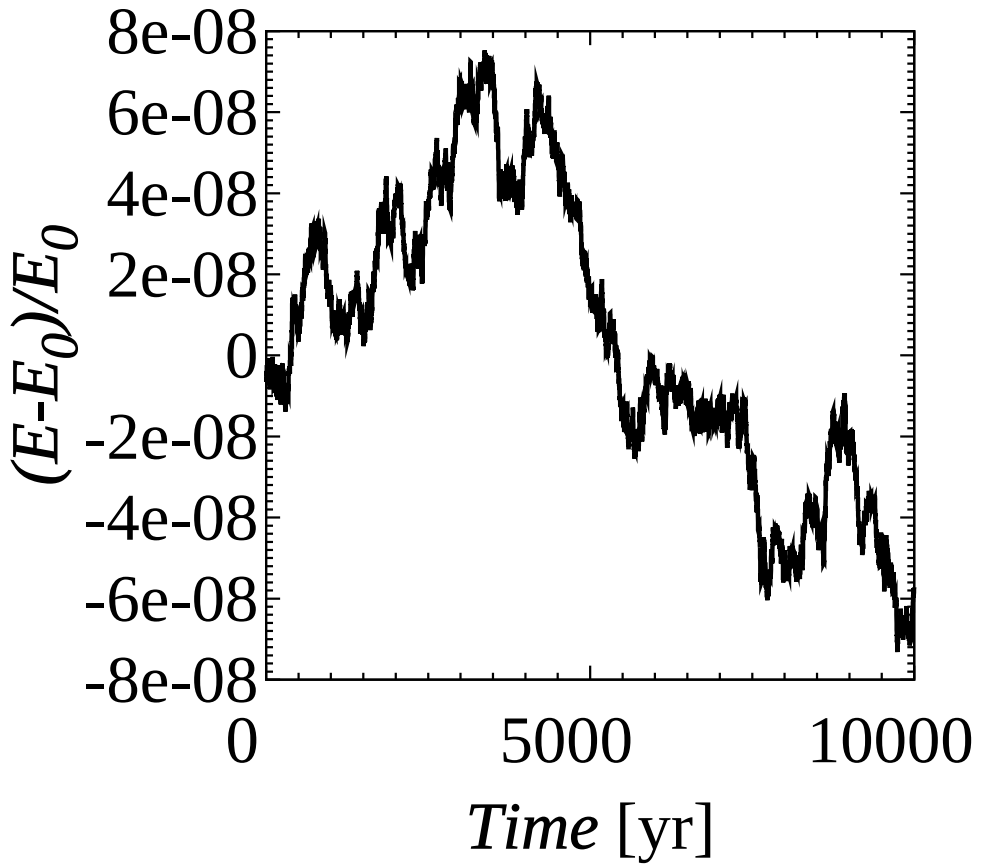
押野君の博士論文 (Oshino et al. 2011, PASJ, in press, arxiv 1101.5504)

やってみると色々考えないといけないことがあった

- カットオフ関数 g の空間スケール
- ツリーのほうの精度、時間刻み
- 独立時間刻みのほうの時間刻みの決めかた

色々やって上手くいくようになった結果を紹介

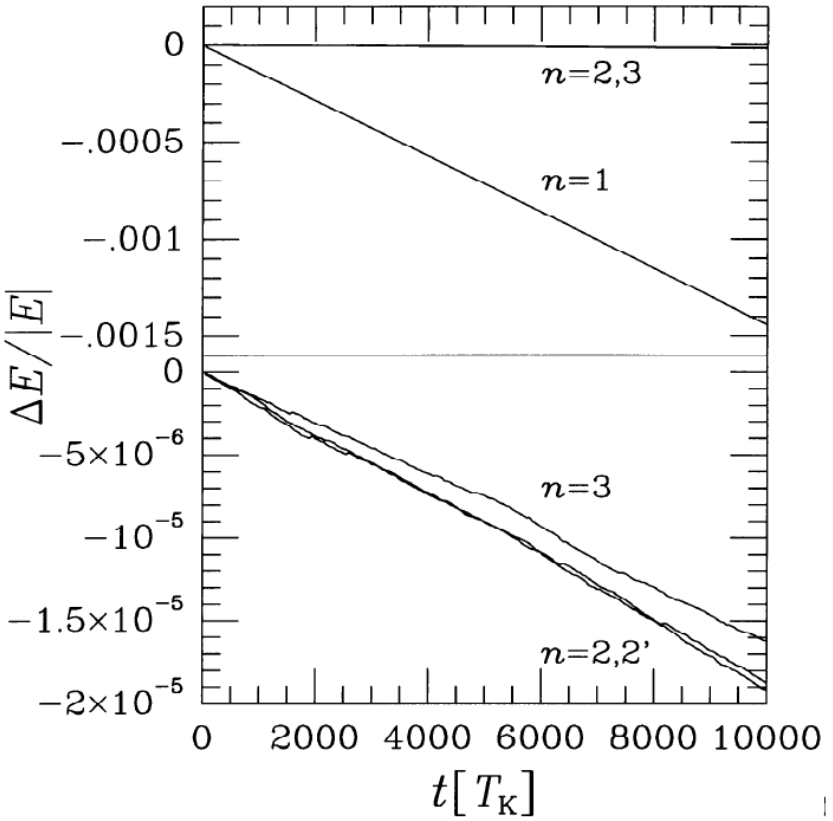
誤差の時間進化



- Kokubo and Ida 1995 と同様な地球領域の計算。1 万粒子
- 衝突、合体とか入っている。時間進化自体 KI95 と同様
- エネルギー保存の精度は「非常に高い」

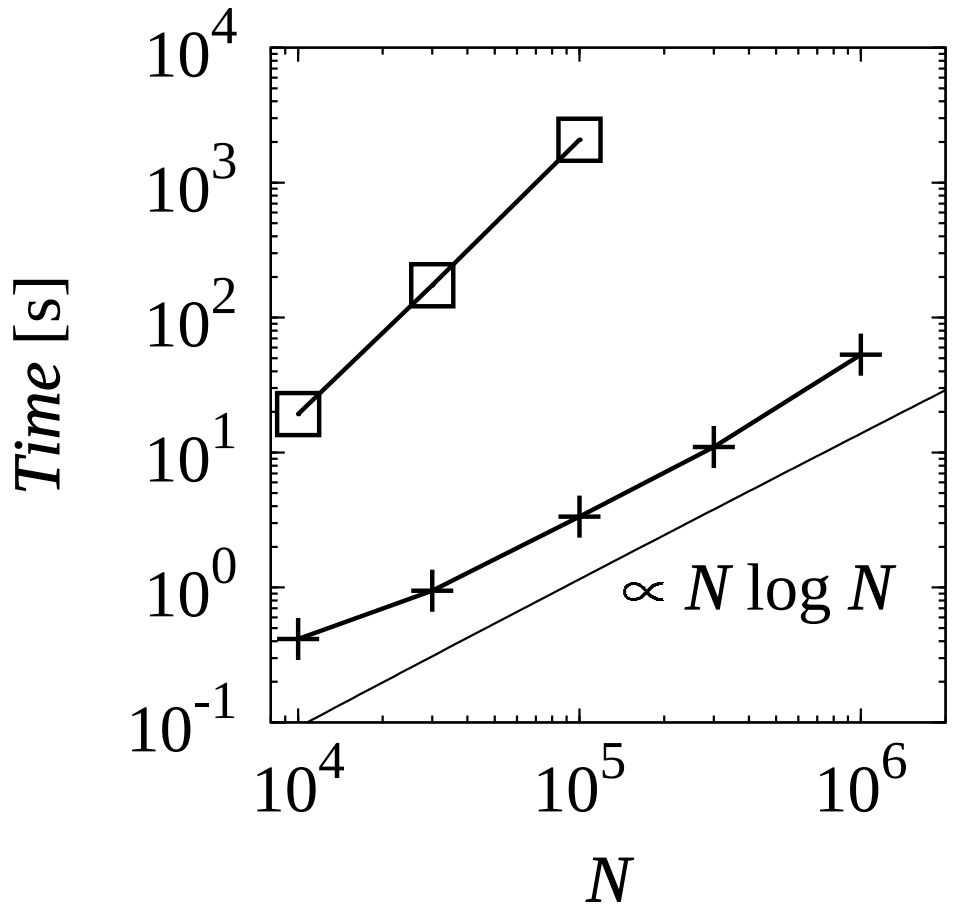
非常にというのはどれくらいか？

Kokubo, Yoshinaga and JM, 1998



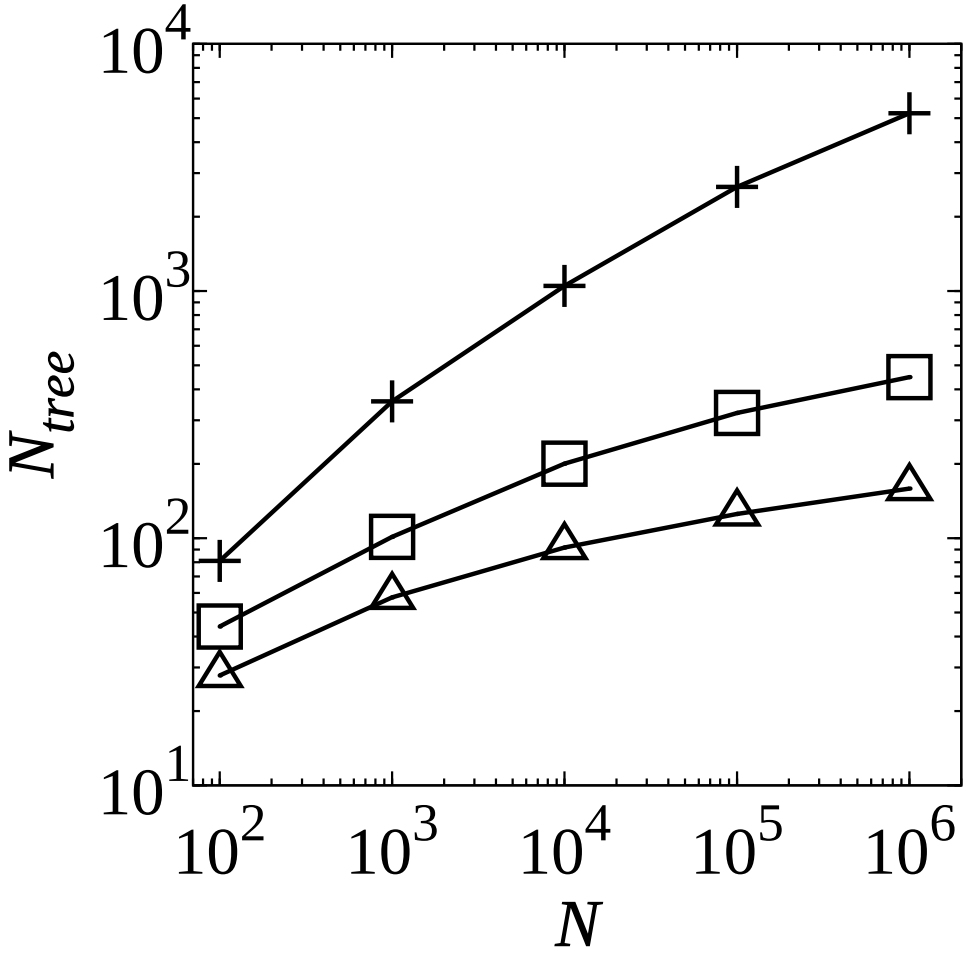
- 太陽重力だけ反復することで誤差を減らしたスキーム
- 1 万年でエネルギー相対誤差 2^{-5}
- Oshino et al. では 3 桁くらい良い
- 1 桁程度は粒子数が多いせい。

計算時間



- 1 ツリーステップ当りの計算時間
- □は普通の直接計算(N^2)。
- ×が今回の方法。
- 速度の絶対値自体は、まだ並列化等できてなくてそんなに速くない

計算量



- 1 ステップ、1 粒子当りの相互作用の数
- 上から、ツリーの精度パラメータ (見込み角) $0.1, 0.5, 1.0$
- 0.1 でも、100 万粒子だと計算量が直接計算の $1/200$
- 惑星形成計算だと、粒子分布が平面的なのでツリーコードの計算量が普通より少ない。

まとめ

- 惑星形成研究の現状についての牧野の「偏見」によるまとめ。
- 重力多体系向けの計算方法を概観した。
- 惑星形成向けの、高速で今までより大粒子数が扱える方法を開発した。
- 原理的に上手く動くはずだが、本当に動いているような気がする。
  - 時間: 独立時間刻み
  - 空間: ツリー法
- 2 つの組合せは難しい。
- 限られた状況では上手くいくような方法はいくつかできた