重力多体系の物理

牧野淳一郎
国立天文台理論研究部/天文シミュレーションプロジェクト

平成 18 年 9 月 11 日

この講義の目標

「重力多体系とはどんなものか、何が面白いのか」を扱いたい。

もうちょっと具体的には

- 力学平衡の概念と力学平衡への進化
- 「熱力学的」あるいは統計力学的な平衡の概念と進化
- 観測的研究との対応
- 最近の研究の話題

といったようなこと。

この講義で扱わないこと

私の良くしっている範囲の話しかしないので、特に以下のような問題は扱わない。(面白くないというわけでも重要ではないというわけでもない)

- 円盤銀河、恒星円盤の安定性や渦巻構造の起源
- 非球対称な恒星系の構造、進化、安定性 (軸対称くらいは少し)

大体の講義計画

- 初めに:重力多体系ってどんなもの？
  - 銀河、球状星団
  - 銀河群、銀河団、大規模構造
  - 銀河中心
- 無衝突系の基礎概念
- 衝突系の基礎概念
- 最近の話題

大体の講義計画

- 初めに:重力多体系ってどんなもの？
- 無衝突系の基礎概念
  - 基礎方程式、力学平衡
  - ジーンズの定理、$f(E, J), f(E)$
  - いくつかの球対称モデル
  - ジーンズ方程式とその応用
  - ビリアル定理と負の比熱
  - ジーンズ不安定
  - Phase mixing、 Landau Damping, violent relaxation
- 衝突系の基礎概念
- 最近の話題

大体の講義計画

- 初めに:重力多体系ってどんなもの？
- 無衝突系の基礎概念
- 衝突系の基礎概念
  - 2体緩和とは何か
  - 無限一様系での2体緩和
  - 熱平衡とその安定性 — 重力熱力学的不安定性
  - 有限振幅での進化
  - 重力熱力学的振動
- 最近の話題

大体の講義計画

- 初めに:重力多体系ってどんなもの？
- 無衝突系の基礎概念
- 衝突系の基礎概念
- 最近の話題
  - 銀河中心の恒星系力学
  - 星団と中間質量ブラックホール
  - ダークマターハローの構造
  - いわゆる矮小銀河問題

重力多体問題とは?

多体系の運動方程式：

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} f_{ij} \tag{1}$$

x_i と m_i は粒子 i の位置と質量、 f_{ij} は粒子 j が粒子 i に及ぼす力。

重力多体系なら f_{ij} はニュートン重力

$$f_{ij} = G m_i m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3}, \tag{2}$$

G は重力定数。

が、この式をじっとみていてもほとんど何もわからない。

分からない理由

(特別な場合を除いては) 運動方程式が解析的に解けない。

解ける場合や、近似的に解ける場合は色々ある。

- ニュートン重力での 2 体問題 (ケプラー問題)
- 特殊な初期条件からの 3 体問題
- 粒子数無限大の極限での力学平衡解

しかし、解析的には解けなくたって、計算機を使えば数値解は求められる。だから、求めればそれでいいんではないの (何故わざわざ物理がどうこうという集中講義なんか聞かないと / やらないといけないの) ?

計算すればなんでもわかるか？

原理的には答は YES。

現実の問題としては NO。

- **計算機の能力**
- **素過程の理解**

例:太陽系の進化

太陽$+9$惑星 ($+$小惑星群$+$彗星$+$カイパーベルト天体$+$その他もろもろ、、、)

- 0 次近似としては質点系
- 惑星の運動には小惑星以下は関係ない

それでいいといえるためには、(原理的には) 他の全ての効果が無視できると「わかっている」必要がある。

- 太陽からの輻射圧
- 潮汐力
- 磁場
- 一般相対論的効果
- その他、、、

太陽系の進化(続き)

太陽系:太陽の回りを各惑星が回っている。

惑星同士の重力は太陽からのに比べて 3 桁程度小さい（木星の質量は太陽のほぼ 0.1%）。従って

ケプラー問題＋摂動

とみなせる。で、各惑星はほぼ周期的な運動をする、つまりずっと同じような軌道を回る。

といっても、これは本当にそうか？(惑星の軌道は本当に安定か?）というのは現在でもまだ完全に解決されたとはいい難い大問題。

古典的な（19世紀くらいの）理解

「ラプラスが太陽系の安定性を証明した」

これは摂動展開したという話。

- ラプラスの頃にはまだ無限級数の収束条件はそもそも知られていなかった
- 摂動展開すればいいというものではないということをポアンカレが示した
- 冥王星、海王星などの新しい惑星がみつかった
- 単純な力学系でも「カオス」になるということがわかってきた

近代的な（20世紀後半の）理解

20世紀後半には太陽系が本当に安定かどうか？というのは、

「なんだかよくわからない問題」

に戻ってしまった。

用語の「整理」

安定これは実はあんまり明確に定義されていない。太陽系だと、要するに惑星がどっかにとんでいってしまうとか、2つがぶつかるとか太陽に落ちるとかそういった大きな変化はないという意味。

可積分 任意の初期条件で解析的な解が求まる。（多重）周期的なので、フーリエ級数で書ける

用語の「整理」(続き)

カオス的 これも定義はかならずしもはっきりしない。可積分なものはカオス的ではないが、一般には可積分かどうかわかるとは限らないし、可積分でなくてもある初期条件の範囲で安定な解が求まるような力学系もある。

ややこしい例

可積分ではないけれど安定な解がある古くて新しい問題：重力3体問題。

3個の質点がお互いの重力に引かれて運動する。

銀河、星団等のもっとも簡単なモデルともいえる。

(2体問題は可積分)

3体問題の性質

一般の3体問題は可積分ではない： ポアンカレによって「証明された」

が、これはどんな初期条件でも安定ではないというわけではない。

安定な解の例

ラグランジュ解（正 3 角形解）。
2,3 個めの質量が十分小さければ安定。
太陽・木星・トロヤ群の小惑星は実際にこのラグランジュ解を作っている。
（ラグランジュではなくてオイラーによって発見されたとか、、、）

ちょっと余談

2006年夏の IAU Genearal Assembly 総会で承認された惑星の定義

- 自己重力で丸い
- 自分の軌道の他の天体を掃きだした

もう一つあった気がしますね。

まあとにかく、トロヤ群とかは「掃きだした」と矛盾しないので木星が惑星でないなんてことはない、というのが (当然ですが) 公式見解。

ちょっと余談 II

10年くらい前に発見された新しい安定軌道 — Figure-8 Solution

アニメーション（東京大学総合文化研究科・船渡さん、 Edinburgh 大学 Douglas Heggie 提供）

Figure-8 solution

- 3 個の質量がほぼ等しい (0.005% 程度) の時にだけ安定（らしい）
- 数値的に（計算機で）周期軌道を見つける新しい方法が開発されて求まってきたもの。

太陽系の安定性について

結局、「計算機で長い間惑星の軌道を追いかけていって、どうなるか見る」のが唯一信用できる方法（信用できないとわかっていない方法）ということになった。

で、安定性はどうなったかというと

と、こういうような、いろいろな方法が出てきたこと、計算機が速くなったこともあって、

太陽系の惑星の軌道は「安定ではない」

ということが 1987 年には示された

ここでの「安定ではない」の意味は：

「非常に近い初期条件の太陽系を 2 個つくってそれぞれ別に計算すると、それぞれでの惑星の位置の差がどんどん大きくなっていく」ということ

不安定のタイムスケール

大きくなるタイムスケール：リアプノフ時間といわれるもの。
軌道間の距離が e 倍になる時間。

求まったリアプノフ時間： 2 千万年

これ自体は 8.5 億年の計算をして求まったもの。

太陽系はでは 45 億年間どうして存在を続けているのか？

さらに長い時間の計算（主に国立天文台の木下・中井・伊藤らによるもの）でわかったこと：

- リアプノフ時間は確かに 2 千万年 程度と短い
- だからといって惑星がどこかに飛んでいってしまうというようなことはおこらない（らしい）

つまり、軌道の安定性ということからみるとカオス的だが、だからといって全くなんでも起こるというわけではなくてある狭い範囲（どういう範囲かはよくわからない）に軌道が収まっている（らしい）

結局のところ

そういうわけで安定かどうかはある意味よくわかっていない。

天文学的な太陽系の安定性という観点からは、 100 億年計算してそこにあればいいというところもある。

より理論的な問題としてはまだ未解決といえる。

以下、太陽系の話はおいて銀河とか星団の話に移る。

例:銀河の進化

典型的な銀河: 1000 億個くらいの星、それと同程度の質量のガス、その数倍の質量の「ダークマター」からなる (ということになっている)

- 1000 億体問題は今の計算機では全く無理
- 1000 億体問題が解けても、それだけでは駄目
  - ガスから星ができる過程
  - 超新星爆発等で星がガスに戻る過程
  - ダークマターはどうするか

計算できないものをどうするか？

普通は「計算できない」

銀河の星の数: 10^{11}

多体計算で扱える粒子数:多くて 10^{7}

分子動力学計算だともっと大変

現実の系: 10^{23} **個**

計算できる: 例えば 10^{5} **程度 (目的による)**

計算できないものをどうするか？ 続き

- 計算しなくてもわかることを考える
- 計算するにしても、少ない粒子数でとかもっと賢い方法でとか考える

いずれにしても、

- 「そこで起きていることはなにか」という「物理」の理解

が重要。

とかいう抽象的な話を続けてもよくわからないので、以下、では重力多体系とはどんなものかという話。

重力多体系

- そもそもどんなもの？(観測)
- 基礎方程式
- 無衝突系としての扱い
- 熱力学的な進化

そもそもどんなもの？(観測)

銀河

球状星団

銀河群

Hickson Compact Group 40
Subaru Telescope, National Astronomical Observatory of Japan
CISCO (J & K')
January 28, 1999

銀河団

http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap950917.html

大規模構造 (天球面)

http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~wjs/apm_grey.gif

大規模構造 (距離情報あり) — SDSS スライス

銀河中心

「星が動いているのが見える」

最近 10 年くらいの観測

軌道周期 15 年くらいで中心ブラックホール (と思われるもの) の周りを回る星なんてものが見つかってきた。

Central Cluster

Genzel et al 2003
K-band
shift-and-add image
中心付近の黒い矢印の先が SgrA*

Surface density

Genzel et al 2003

10” 以内の恒星の質量 $\sim 10^6 M_\odot$ (あんまり信用はできない)

若い星が結構多い。

0.5” 以内でも若い星がある。(S1, S2, S0-16 ...)

いくつかの中心付近の星の軌道

Eisenhauer et al 2005

星の分布は「等方的」少なくとも円盤的とはいいがたい

これらの星は結構若い ($10M_\odot$ 以上)

もっと暗い星は普通の赤色巨星

若い高密度星団

20 年くらい前の星団の概念:

- 球状星団: 質量そこそこ、年齢古い (星の年齢は宇宙年齢くらい)、割合質量大きい (太陽質量の 10^5 倍程度以上)、重力的にバウンド
- 散開星団: 質量小さい、割合若いものもある。重力的にバウンドしてるとは限らない

最近: 非常に若くて質量も結構大きい、上のどちらでもないものが見つかってきた

- 銀河系内: Arches, Quintuplet (最初の発見は京都大学の長田さんたち？)
- 銀河系外: 例えば M82 の中心近くに非常に沢山の星団

バルジの起源、中心ブラックホールの起源を理解する鍵？

Arches, Quintuplet

銀河中心から 30pc くらい。質量は $10^4 M_\odot$ 以上 (だったはず) 年齢は 1-2Myrs

重力多体系の基礎方程式

もとの方程式自体はもちろん、各粒子の運動方程式

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} G m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3}, \tag{3}$$

数値計算にはもちろんこれを使うわけだが、理論的な扱いには不便

というわけで、しばらくは (1 粒子) 分布関数 $f(x, v, t)$ で話をする。

この時の基礎方程式:(無衝突) ボルツマン方程式

(無衝突) ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \tag{4}$$

f:6 次元位相空間での分布関数 Φ :重力ポテンシャル, 以下のポアソン方程式の解

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho. \tag{5}$$

ここで、 G は重力定数であり、 ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int dv f, \tag{6}$$

なお、以下の議論では（当分） m のことは忘れて、その代わり f が個数密度ではなくて質量分布であるということにしておく。

ボルツマン方程式の導出

BBGKY とか使った導出はなんか見れば書いてあるし、良く知らないのでパス。

直観的な意味:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}$$

要するに 6 次元位相空間でのラグランジュ微分 Df/Dt で、これが $= 0$: 非圧縮での連続の式

以下でもうちょっとまともな導出

ボルツマン方程式の導出 続き 1

位相空間での座標を $w = (x, v, t)$ と書く

重力ポテンシャルを $\Phi = \Phi(x, t)$ とおく

位相空間の中での粒子の流れは

$$\dot{w} = (\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\nabla\Phi) \tag{7}$$

これは流れであるので、連続の方程式を満たす。つまり

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial (f\dot{w}_i)}{\partial w_i} = 0, \tag{8}$$

一般の流れでは、第2項の微分はややこしいが、w の性質から

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \dot{w}_i}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i} \right) = \sum_{i=1}^{3} -\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = 0 \tag{9}$$

ボルツマン方程式の導出 続き 2

従って w の微分の項は全部なくなって、結局

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \tag{10}$$

f:6 次元位相空間での分布関数

Φ :重力ポテンシャル, 以下のポアソン方程式の解

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho. \tag{11}$$

ここで、 G は重力定数であり、 ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int dv f, \tag{12}$$

力学平衡

「力学平衡」$=$ 無衝突ボルツマン方程式とポアソン方程式を連立させたものの定常解

ある分布関数 f が力学平衡にある$=$ それによって決まるポテンシャル Φ を固定して考えた時に、f の時間微分が 0 になるということである。

普通の流体なら静水圧平衡にあたる。

当然であるが熱平衡とは限らない

無衝突ボルツマン方程式と熱平衡

力学平衡ではないところからの無衝突ボルツマン方程式に従った時間発展を考える。

これは流れにそって f を保存するので、系のエントロピー ($f \log f$ の積分) は一定、つまり、少なくとも形式的にはエントロピーは保存される。

もちろん、「形式的には」と断わるのは、もうちょっとややこしい問題があるから。これはあとで。

運動の積分

ポテンシャル Φ のもとで、ある x, v の関数 I が運動の積分であるとは、その上で

$$\frac{d}{dt}I(x,v) = 0, \tag{13}$$

がなり立つこと。

つまり、実際にすべての粒子の軌道について、その上でその量が変化しないということ

ちょっと変形すれば

$$v \cdot \nabla I - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial I}{\partial v} = 0 \tag{14}$$

無衝突ボルツマン方程式の定常解と同じ式

細かい話

「運動の積分」というときの流儀は２通り

- 運動の保存量ならなんでも
- 位相空間の座標だけの関数でかつ保存量なもの

違い: たとえば１次元調和振動子の「初期の位相」は保存量だが下の定義では運動の積分ではない。以下は下の定義を。

運動の積分の例:

エネルギー $1/v^2 + \Phi$ や、ポテンシャルが球対称（r だけの関数）の場合の角運動量ベクトル $\mathrm{L} = r \times v$ は運動の積分である。

ジーンズの定理

I について以下の「ジーンズの定理」がなり立つ。

ジーンズの定理 任意の無衝突ボルツマン方程式の定常解は、運動の積分を通してのみ位相空間座標に依存する。逆に、任意の運動の積分の関数は定常解を与える。

つまり

分布関数 f が定常である $\leftrightarrow$ 運動の積分 $I_1, I_2, ..., I_m$ があって $f = f(I_1, I_2, ..., I_m)$ の形で書ける

これはとても基本的で重要な定理

証明

「定常ならば運動の積で書ける」というほう:これは、f 自体が運動の積分の定義を満たしているので、 OK。

逆のほうは、実際に f の全微分を I_k で書き下せば、それぞれが 0 になるということからいえる。

これはとても強力な定理だが、一般の場合にはそれほど役に立つわけではない。

一般のポテンシャルでは運動の積分というのは 5 個ある。5 個全部は簡単にはきまらないから。

ただし、球対称とか軸対称とか条件をつけると、割合簡単にいろいろちゃんと決まるようになる。以下、まず球対称の場合を考える。

球対称の場合

球対称の場合、運動の積分はエネルギーと角運動量の 3 成分で 4 つ。

一般にはもう一つあるが、これは特別な場合を除いてあまり意味がないので、定常な分布関数はエネルギーと角運動量だけで書けると思っていい。

意味がある特別な場合: ケプラー軌道のような、軌道が閉じる場合。

この時には、エネルギーと角運動量の他に、軌道全体の向きを表す量（近点経度、ラプラス・ルンゲ・レンツ・ベクトル）が保存する。これはちゃんと保存量になっている。

普通の場合は

一般には軌道が閉じない。

近点経度に対応するような保存量は実は存在している

でも、ある軌道はエネルギーと角運動量で決まる部分空間を覆ってしまう

（数学的には、もちろんすべての点を覆えるのではなく、任意の点について、いくらでも近くにいけるというだけだが）。

その保存量に分布関数が依存すると、連続性とか微分可能性とかに困難を生じる。あんまり物理的ではない。

$f(E, J)$

球対称だと f は E と J による

球対称なので f は J の方向に依存しない $\rightarrow$ 絶対値だけに依存する

球対称の分布関数は一般に $f(E, J)$ と書ける。

我々が扱いたいのは自己重力系なので、実際にポアソン方程式を球対称の場合に書き下してみると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 4\pi G \int f\left(\frac{1}{2}v^2 + \Phi, |r \times v|\right) dv, \quad (15)$$

てな感じになる。

但し、例えば輝度分布から $f(E, J)$ を決めるのは情報不足。

$f(E)$ の場合

さらに単純化してとりあえず J にもよらない場合というのを考えてみる。

この場合空間上の各点で速度分散が等方的

一般にある方向の速度分散というのは

$$< v_e^2 >= \frac{1}{\rho} \int v_e^2 f(v^2 + \Phi) dv \tag{16}$$

となるが、 f が v の絶対値にしかよらないので、 v_e の方向にこの積分はよらない。まあ、速度分散がとかいうより、速度分布自体が等方的なのだから当然ではある。

$f(E)$ の場合 (続き)

以下、扱いやすくするために変数をとり直す。

$$\Psi = -\Phi + \Phi_0, \qquad \mathcal{E} = -E + \Phi_0 = \Psi - v^2/2 \quad (17)$$

ここで Φ_0 は定数で、普通は $\mathcal{E} > 0$ で $f > 0$, $\mathcal{E} \leq$ で $f = 0$ となるようにとる。

これらを使って、さらに v の角度方向に渡って積分すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right) &= -16\pi^2 G \int_0^{\sqrt{2\Psi}} f(\Psi - \frac{1}{2}v^2)v^2 dv \\ &= -16\pi^2 G \int_0^{\Psi} f(\mathcal{E})\sqrt{2(\Psi - \mathcal{E})}d\mathcal{E}. \end{aligned} \quad (18)$$

これで、一般に f を与えて Ψ を求めるとか、あるいはその逆とかが出来る。

球対称な分布関数の例

ここであげるのはあくまでも例であるが、さまざまな理由からその性質がよく調べられているものである。

- ポリトロープ
- Hernquist モデルとその仲間
- 等温解
- キングモデル

ポリトロープとプラマーモデル

ある意味でもっとも簡単な分布関数の例は、$\mathcal{E}$ の冪乗（パワー）で書けるものである。例えば

$$f(\mathcal{E}) = \begin{cases} F\mathcal{E}^{n-3/2} & (\mathcal{E} > 0) \\ 0 & \text{otherwize} \end{cases} \tag{19}$$

これから、まず密度を Ψ の関数として求められる。答えは

$$\rho = c_n \Psi^n \quad (\Psi > 0) \tag{20}$$

となる。ただし、 c_n が有限になるためには $n > 1/2$ でないといけない。

上を使ってポアソン方程式から ρ を消去すると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right) + 4\pi G c_n \Psi^n = 0 \tag{21}$$

Lane-Emden 方程式

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right) + 4\pi G c_n \Psi^n = 0 \tag{22}$$

から、変数を適当にスケーリングして

$$\frac{1}{s^2}\frac{d}{ds}\left(s^2\frac{d\psi}{ds}\right) + \psi^n = 0 \tag{23}$$

としたものを Lane-Emden 方程式と呼ぶ。

実際には、上の Lane-Emden 方程式を解かないとポテンシャルや密度がどうなっているかはよくわからない。

プラマーモデル

一般の n ではLane-Emden 方程式には初等的な解はないが、$n = 5$ の場合には解があることが古くから知られている。これは

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}s^2}} \tag{24}$$

の形をしている。密度は $c_5\phi^5$ で与えられる。

密度が $r = 0$ で有限で、$r \to \infty$ で $1/r^3$ より速く落ちるので、質量は有限。

天文学的になにか素晴らしいものではないが、球状星団のうち中心密度が低いものには似ていなくもない。とりあえず、これの意味は、解析関数で簡単に書ける自己重力系の self-consistent なモデルであるということである。

ポリトロープガス球との関係

Lane-Emden 方程式はポリトロープな状態方程式

$$P \propto \rho^{1+1/n} \tag{25}$$

の自己重力ガス球の静水圧平衡の式と同じ。

従って、密度構造は同じ。でも、分布関数や局所的な速度分布は一般には同じではない。

ガス: (普通は) 局所的にボルツマン分布

重力多体系: エネルギーのべき乗

Hernquist Model

プラマーモデルはその存在が前世紀から知られているが、こちらは論文が発表されたのが 1990 年という割合新しいモデルである (Hernquist, L., 1990, ApJ 356, 359)。

ポテンシャルを

$$\Phi = -\frac{1}{r+a} \tag{26}$$

で与える。密度分布は

$$\rho = C\frac{a}{r(r+a)^3} \tag{27}$$

で書ける。分布関数は求まっているが、めんどくさいのでここには書かない。

Hernquist Model と$r^{1/4}$則

Hernquist Model には、「$r^{1/4}$ 則をかなり良く再現する」という (天文学的には) 著しい特徴がある。

FIG. 4. Surface brightness profiles for the $R^{1/4}$ law (*thick curve*) and the present model (*thin curve*) as a function of $(R/R_e)^{1/4}$. Surface brightness is normalized to its value at R_e where R_e refers separately to the effective radii of the two models.

$r^{1/4}$ 則についてはまた後で。
要するに、観測される楕円銀河の表面輝度の対数（等級）が、半径の$1/4$乗に対して直線にのって見えるというものである。

Hernquist モデルの仲間

Hernquist モデル: 内側でスロープ -1、 外側で -4。

- 2 つのスロープ
- その切り替わる速さ

を変えると色々モデルができる。

外側 -4 のもの (有限質量)

Jaffe モデル、 Dehnen モデル、 Tremaine の η モデル

外側 -3 のもの (有限質量)

Navarro-Frenk-White (NFW) プロファイル、Moore プロファイル

Dehnen Model

密度分布

$$\boldsymbol{\rho = C\frac{a}{r^{\gamma}(r+a)^{3-\gamma}}} \tag{28}$$

$\boldsymbol{\gamma = 1}$**: Hernquist model**

$\boldsymbol{\gamma = 2}$**: Jaffe model**

NFW プロファイル、Moore プロファイル

NFW (NFW1996)

$$\rho = C\frac{a}{r(r+a)^2} \tag{29}$$

Moore (Moore et al 1999)

$$\rho = C\frac{a}{r^{1.5}(r^{1.5}+a^{1.5})} \tag{30}$$

どちらも、ダークマターの構造形成シミュレーションの結果をフィットするモデル。詳しくは後で。

等温モデル

熱平衡状態について理解しておくことは結構大事である。

熱平衡状態では（古典統計なので）分布関数はマックスウェル–ボルツマン分布、すなわち

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathcal{E}/\sigma^2} = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{31}$$

で与えられなければならない。

等温モデル(続き)

まず、例によって分布関数を速度空間で積分して密度をポテンシャルの関数として表す。この時に誤差関数についての

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = 1 \tag{32}$$

を使うと、

$$\rho = \rho_1 e^{\Psi/\sigma^2} \tag{33}$$

ポアソン方程式にこれを入れると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{34}$$

従って、

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\log\rho}{dr}\right) = -4\pi G\sigma^2\rho \tag{35}$$

等温モデル(続き2)

まず、一つ特別な解があるということを指摘しておく

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \tag{36}$$

は、解の一つとなっている。(singular isothermal sphere)

これは self consistent ではない: 質量が $M_r \propto r$ となって発散

渦巻銀河の、「回転速度が中心からの距離に（あまり）依存しない」（いわゆる flat rotation curve）という性質: $\rho \sim 1/r^2$ のダークハローを示唆(？)

特別ではない解は、中心密度を有限にして中心から外側に向かって解いていけばいい。この時でも、 $r \to \infty$ の極限では singular isothermal に近付く。

流体との関係

等温モデルは、エントロピー極大であり、分布関数がボルツマン分布になっているという特別な性質がある。このため、等温ガス球と実は同じ構造をとる。以下、ガス球について方程式を導いておく。静水圧平衡の式は

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2} \tag{37}$$

である。状態方程式に等温の

$$P = \frac{k_B T}{m} \rho \tag{38}$$

を使って P を消して、さらに M_r を微分してみれば、係数を別にして

$$C \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \log \rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho r^2 \tag{39}$$

ポリトロープの場合再考

等温モデルでは stellar system とガスで同じ方程式になっている。

ポリトロープでも、ポリトロピックな状態方程式を持つガス球の密度分布と stellar system のそれとは一致する。

が、等温モデルの場合とは実は本質的な違いがある。等温モデルの場合は、分布関数そのものが一致する（ボルツマン分布であり、局所的にも大局的にもエントロピー最大）が、一般のポリトロープではそんなことはない（そもそもガス球ではジーンズの定理が成り立たないし、局所的には普通ボルツマン分布であるから）。

King Model

等温モデルは、すでに述べたように熱平衡（エントロピーの変分が 0 ）という重要な意味を持つ定常解である。

ちょっと問題なこと:質量が無限大であり現実に存在しない

なにか適当な仮定を置くことで、「おおむね等温モデルであり、なおかつ有限の大きさをもつ」というものを考えることはできないだろうか？

発散する理由

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathcal{E}/\sigma^2} = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{40}$$

上の分布関数で、質量が発散する理由: な理由は、分布関数がエネルギー無限大 ($\mathcal{E} \to -\infty$) まで 0 にならないこと

有限の質量のものが自己重力でまとまっているためには、すべての粒子のエネルギーが負でないといけないので、これでは自己重力系が表現出来ないのはある意味では当然

それならば、ある有限のエネルギー以上のものはないことにしてしまえばいい。

有限で切る方法

とりあえず Lowered Maxwellian と呼ばれる以下のようなものを考える

$$f(\mathcal{E}) = \begin{cases} \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}(e^{\mathcal{E}/\sigma^2} - 1) & (\mathcal{E} > 0) \\ 0 & (\mathcal{E} \leq 0) \end{cases} \tag{41}$$

これは$\mathcal{E} = 0$で $f = 0$ となるように、 1 を引いたというだけである。これしか方法がないというわけではないが、これは扱いやすいこともあってもっともよく使われている。

ちょっと計算

例によって、まず速度空間で積分すれば

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{4\pi\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\int_0^{\sqrt{2\Psi}}\left[\exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) - 1\right]v^2 dv \\ &= \rho_1\left[e^{\Psi/\sigma^2}\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\Psi}{\sigma}}\right) - \sqrt{\frac{4\Psi}{\pi\sigma^2}}\left(1 + \frac{2\Psi}{3\sigma^2}\right)\right] \qquad (42)\end{aligned}$$

ここで erf は誤差関数で、積分が有限区間であるために出てくる。最後の項は1引いている分の寄与である。ちなみに

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt. \qquad (43)$$

これでポテンシャルの関数として密度が求まったので、あとはポアソン方程式に入れて数値的に解くだけである。

境界条件は？

半径方向の分布は、中心から無限遠まで与えられる。

実は外側の境界をどうとるべきかはちょっと自明ではないので、とりあえず中心から初期値問題として解くことを考える。

初期条件としては、まず $d\Psi/dr = 0$ とする、すなわち、中心密度が有限の解を考える。 Ψ_0 は任意に選べるので、これの値によっていろいろな解がでてくる。

数値解

これは実際に数値的に解いてみたものの例である。速く落ちるものから、Ψ_0 が $1,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12$ と変えてみてある。

なお、横軸のスケールの r_0 は、

$$r_0 = \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_0}} \qquad (44)$$

として無次元化するのに使っている。

数値解(続き)

有限の半径 r_t で ρ は 0 になる。

(解いていったときに Ψ が 0 になってしまうため)

この半径: King model の tidal radius 潮汐半径

King Model は、球状星団のプロファイルのモデルとして非常によく使われている。なお、$c = \log(r_t/r_0)$ のことを concentration parameter といって、観測データにキングモデルを合わせた論文では普通これがパラメータになる。理論計算では Ψ_0 が使われるので、ちょっとややこしいことが多い。

多成分系の例

実際の天体、例えば銀河団: ダークマター、ホットガス、銀河とかからなる多成分系

成分毎に違う分布であっても不思議ではない、というより同じだったら不思議。

例えば球対称なダークマターの中でのガスの分布を考える。

X線ガスの分布

1. *Einstein* IPC isointensity contours of the Hydra A cluster superposed on the optical image of the cluster. The contour levels correspond to 3, 5, 7, 10, 14, 32, 40, 49, 59, 70, 82, and 95 σ above background. The fluxes in the inner and outer contours are 3.3×10^{-4} and 1.4×10^{-4} IPC counts s arcmin^{-2}.

Einstein IPC による Hydra A 銀河団に (David et al. ApJ 1990, 356, 32) の像。

モデル化

Chandra だと無限に細かい構造が見えてこんな簡単にはすまないが、まあ、簡単にはこんなふうに丸いということに。

以下、

- ほぼ等温である
- ほぼ静水圧平衡にある

ということにする。これもまあ細かく見れば駄目だけど。

もっと単純化

さらに、

- ガスの自己重力は無視できる

ということにする。これは、銀河団なんかだとちょっと怪しいが、まあ全然だめというほど悪くはない。さらに、

- 恒星系は等温分布である

とする。だんだん、ほんとかなあという気がしてくることと思うが、まあ、研究の現場というのはそういうものです。

これぐらいたくさん仮定すると、美しい理論を構築できることになる。

ガスの分布

まず、ガスの速度分散と恒星系の速度分散が等しい場合というのを考えてみる。

ガスの密度 ρ_g が従う方程式は、星の密度を ρ_s として

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\log\rho_g}{dr}\right) = -\frac{4\pi Gm}{k_B T}\rho_s r^2 \tag{45}$$

ρ_s 自体がこの方程式の解

これは ρ_g の対数についての微分方程式なので、

$$\rho_g = C\rho_s \tag{46}$$

というのが解になっている。つまり、どこでもガスと星の密度比が等しいというのが平衡状態になる。まあ、当り前ですね。

ガスの分布 温度（速度分散）が違う場合

温度（速度分散）が違う場合を考える。

ガスの温度T_gと、恒星系に対応する「温度」T_sの比を $T_g/T_s = 1/\beta$ と置くと、ガスの密度が従う方程式は、

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\log\rho_g}{dr}\right) = \beta[\text{式}\,(45)\,\text{の右辺}] \tag{47}$$

この解は

$$\rho_g = C\rho_s^{\beta} \tag{48}$$

で与えられる。

対数でグラフに書いて縦に β 倍したものが解。

温度が高ければ等温解に比べて傾きが緩くなり、低ければより急になる。

β モデル

と、ここまではちゃんと正しい話をしてきたが、実際に観測結果の解釈に使う時にはさらに大胆な近似がなされる。以下、Sarazin の X-ray emissions from clusters of galaxies 5.5 節に従っていわゆる β モデルについて説明し、その問題点について検討する。

式 (48) は使い回しがよくない。

ρ_s のほうがそもそも数値的にしか求まっていない。

ρ_s をなにか解析関数で置き換えたい。

以下の質量分布は「$r < 2.5r_c$ 程度ならば」等温解の非常によい近似になっている。（遠くにいくとどんどんずれるが）

$$\rho = \rho_0[1 + (r/r_c)^2]^{-3/2} \tag{49}$$

βモデル 続き1

$$\rho = \rho_0[1 + (r/r_c)^2]^{-3/2} \tag{50}$$

を恒星系の分布と思えば、ガスの分布は

$$\rho = \rho_0[1 + (r/r_c)^2]^{-3\beta/2} \tag{51}$$

と解析関数で書けることになって大変結構である。

X 線で観測する $\rightarrow$ 観測されるのは X 線の強度＝密度の2乗を視線方向で積分したもの

$$I(r) = 2\int_0^\infty \rho(\sqrt{r^2 + z^2})^2 dz \tag{52}$$

となるわけだが、これは積分できて、

$$I(r) = C[1 + (r/r_c)^2]^{-3\beta+1/2} \tag{53}$$

βモデル による観測のフィッテイング

観測をフィットすると: 左はうまくいく例である (Jones and Forman 1984)。右は先ほど見せた Hydra A

FIG. 2.—*Einstein* IPC radial X-ray surface brightness profile of the Hydra A cluster. Crosses are the model, continuous line is the data.

βモデル による観測のフィッテイング 2

Ikebe et al. 1997, ApJ 481, 660

FIG. 8.—Background-subtracted PSPC radial profile fitted with the double β model. Open circles represent the data, and histograms the models.

とまあ、こんな感じになる。

「問題点」

- かなり多くの銀河団、とくにコア半径の小さいものでは、β モデルでフィットするとコアの付近に超過 excess が出る。これは普通、「低温成分」（いわゆる Cooling flow）として理解されている。
- 一般に、スペクトルと銀河の速度分散から決めた β のほうが、β モデルの β よりも 2 倍くらい大きめにでる。

「問題点」は本当に問題か？

- Cooling flow cluster はコアが小さく、明らかに β モデルによるフィットが適当ではないところに無理に β モデルを当てはめている
- 恒星系の分布が isothermal かどうかは怪しい

最近はもうちょっと違うダークマターモデルとかを使うようになって、この辺の解釈は変わりつつあるみたい。

教訓

- 観測家は自分が大学院生の頃に習った理論で最新の自分の観測を解釈する

教訓

- 観測家は自分が大学院生の頃に習った理論で最新の自分の観測を解釈する
- 理論家は自分が大学院生の頃に習った観測の話をベースにモデルや理論を作る

教訓

- 観測家は自分が大学院生の頃に習った理論で最新の自分の観測を解釈する
- 理論家は自分が大学院生の頃に習った観測の話をベースにモデルや理論を作る
- 理論家の講義は時代遅れな観測に基づいた時代遅れな理論の話だったりする

ρ から f を求める

分布関数を実際に、例えば観測データの説明として使うためには、与えられた密度に対して、それを実現するような分布関数を作るという作業が必要になる。これを、 $f(E)$ の場合についてやってみる。

$f(E)$ の時の密度と分布関数の関係は

$$\rho(r) = 4\pi \int_0^{\Psi} f(\mathcal{E})\sqrt{2(\Psi - \mathcal{E})}d\mathcal{E}. \tag{54}$$

密度が至るところ正ならば Ψ は r の単調な関数なので、 ρ を Ψ の関数と思って、両辺を Ψ で微分すれば

$$\frac{1}{\sqrt{8}\pi}\frac{d\rho}{d\Psi} = \int_0^{\Psi} \frac{f(\mathcal{E})d\mathcal{E}}{\sqrt{\Psi - \mathcal{E}}} \tag{55}$$

ρ から f を求める 続き

$$\frac{1}{\sqrt{8}\pi}\frac{d\rho}{d\Psi} = \int_0^{\Psi} \frac{f(\mathcal{E})d\mathcal{E}}{\sqrt{\Psi - \mathcal{E}}} \tag{56}$$

これは Abel の積分方程式になっていて、以下の解を持つ

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{8}\pi^2}\frac{d}{d\mathcal{E}}\int_0^{\mathcal{E}} \frac{d\rho}{d\Psi}\frac{d\Psi}{\sqrt{\mathcal{E} - \Psi}} \tag{57}$$

ちょっと書き替えれば

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{8}\pi^2}\left[\int_0^{\mathcal{E}} \frac{d^2\rho}{d\Psi^2}\frac{d\Psi}{\sqrt{\mathcal{E} - \Psi}} + \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}}\left(\frac{d\rho}{d\Psi}\right)_{\Psi=0}\right] \tag{58}$$

例:Jaffe model

Jaffe model

$$\rho = \frac{r_J^4}{r^2(r+r_J)^2}, \quad \Psi = -\ln\left(\frac{r}{r+r_J}\right) \tag{59}$$

を考える。これをもってきたのは結果が簡単だから。

まず、 r を Ψ で表してそれを ρ の式に入れると、

$$\rho = (e^{\Psi/2} - e^{-\Psi/2})^4 \tag{60}$$

これを式58に入れればいいわけだが、 $x = \sqrt{\mathcal{E} - \Psi}$（ただし、$\mathcal{E} = -Er_j/GM$）を積分変数にすれば、

$$\begin{aligned} f(E) &= \frac{M}{2\pi^3(GMr_J)3/2}[F_-(\sqrt{2\mathcal{E}}) - \sqrt{2}F_-(\sqrt{\mathcal{E}}) \\ &- \sqrt{2}F_+(\sqrt{\mathcal{E}}) + F_+(\sqrt{2\mathcal{E}})] \end{aligned} \tag{61}$$

但し、

$$F_{\pm} = e^{\mp x^2} \int_0^x e^{\pm x'^2} dx' \tag{62}$$

Jeans Equations

無衝突ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}} = 0, \tag{63}$$

のモーメントをとっていろいろ考えてみる。

速度空間全体で積分

第 3 項は発散定理で表面積分に置き換えられ、結局 0 になる。

速度空間で積分(続き)

最初の 2 項は

$$\nu = \int f d^3\mathrm{v}; \bar{v}_i = \frac{1}{\nu} \int f v_i d^3\mathrm{v} \tag{64}$$

と置いてやれば（密度と、局所的な平均速度）

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial (\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{65}$$

これは、流体の場合の連続の式と同じ。

もうちょっといろいろする

さらに、速度の 1 次のモーメントをとるために Collisionless Boltzman に v_j を掛けて積分してみると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f v_j d^3\mathrm{v} + \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathrm{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathrm{v} = 0, \quad (66)$$

というような式が出てくる。但し、 i についての和をとっていることに注意。

さて、$v_j f$ について発散定理（1 次元）を使えば

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathrm{v} = -\int \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f d^3\mathrm{v} = -\delta_{ij}\nu \quad (67)$$

となるので、結局

$$\frac{\partial(\nu \bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (68)$$

但し、$\overline{v_i v_j}$ は $v_i v_j$ の局所平均である。もうちょっと見通しの立つ式にするために、まず連続の式を使って第一項から $\partial\nu/\partial t$ を消すと

$$\nu\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial t} - \bar{v}_j\frac{\partial(\nu\bar{v}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\nu\overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = 0 \tag{69}$$

さらに、

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} \tag{70}$$

を使って書き直すと

Jeans 方程式

$$\nu\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial t}+\nu\bar{v}_i\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial x_i}=-\nu\frac{\partial\Phi}{x_j}-\frac{\partial(\nu\sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \tag{71}$$

これは、流体の場合のオイラー方程式（運動方程式）と大体同じ格好になっている。左辺は平均の流れに沿ってみた平均速度の Lagrange 微分であり、右辺第一項はポテンシャルから力である。

最後の項は普通なら圧力の項が出てくる。流体と違うのは、ここが非等方的な stress tensor σ_{ij}^2 になっているということである。

なお、いうまでもないが、速度分布が等方的であれば stress tensor は $\sigma^2 I$（I は単位行列）の形に書ける。

例：球対称恒星系の M/L

密度分布が球対称で平均の流れがない場合、極座標系での Jeans equation は以下の形に書き直せる：

$$\frac{d(\nu\overline{v_r^2})}{dr} + \frac{\nu}{r}\left[2\overline{v_r^2} - \left(\overline{v_\theta^2} + \overline{v_\phi^2}\right)\right] = -\nu\frac{d\Phi}{dr} \tag{72}$$

（証明は、、、まあ、面倒なだけなので省略）もうちょっと話を簡単にするために、等方的な場合を考えると、結局

$$\frac{1}{\nu}\frac{d(\nu\overline{v_r^2})}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr} \tag{73}$$

すなわち

$$M(r) = -\frac{r\overline{v_r^2}}{G}\left(\frac{d\ln\nu}{d\ln r} + \frac{d\ln\overline{v_r^2}}{d\ln r}\right) \tag{74}$$

M/L の推定

$$M(r) = -\frac{r\overline{v_r^2}}{G}\left(\frac{d\ln\nu}{d\ln r} + \frac{d\ln\overline{v_r^2}}{d\ln r}\right) \tag{75}$$

で、質量が「観測量」からわかる。つまり、密度と速度分散の半径方向の分布がわかれば、質量分布が決まるということになる。

ν は質量を反映していないもの、例えば星の数とか、あるいは単位体積あたりの luminosity の分布でも構わない

さらに、球対称、等方を仮定したので、表面輝度分布や視線方向速度分布から輝度密度と速度分散の空間分布を求められるので、これらから「実際にどれだけの質量があるはずか」を求められるわけである。

M/L の推定

というわけで、実際の観測データから M/L の空間分布が決められることになる。楕円銀河の中心に大質量ブラックホールがあるというような話は、もっとも簡単にはこのようにして質量を推定する。

なお、逆に、M/L を一定として、速度の非等方性の空間分布を求めることもできる。多くの、中心に大質量ブラックホールがあるとされている楕円銀河で、非常に非等方性の高い速度分布を作れば観測された密度と速度分散の分布が説明できないわけではないということが示されている。

例の続き:球状星団の中心にブラックホール?

2002 年 9 月に、球状星団 M15 の中心に太陽質量の 3000 倍の質量のブラックホールを発見したという論文が発表され、STScI がプレスリリースを大々的に行ったので日本の新聞でも報道された。

新聞発表 (牧野による適当な訳)

宇宙望遠鏡科学研究所のファン・デア・マレル博士が率いるチームは、ペガサス座の方向、3万2千光年の彼方にある球状星団 $M15$ にブラックホールを発見しました。彼の協力者で、やはり宇宙望遠鏡科学研究所のゲルセンは、ブラックホールの質量が太陽の 4000倍だということを突き止めました。

これまで、 X線での観測で .... 星形成銀河に非常に明るい X線源が見つかっていました。これは中間質量ブラックホールとも解釈できるものでしたが、他の解釈もできるものでした。これに対し、ハッブル (宇宙望遠鏡) による測定は、個々の星の速度に基づくもので、直接ブラックホールの質量を与えるものです。

観測は何か？

ハッブル宇宙望遠鏡の分光器を使って、球状星団の中心部のいくつかの星の視線速度を測定し、それから速度分散を求めた。

何故ブラックホールがあることになるか (1)

何故ブラックホールがあることになるか(2)

1. M/L が一定と仮定して、表面輝度の分布から質量分布を求める。
2. 質量分布からジーンズ方程式を使って速度分布を求めてみる。
3. これは、定数をふってみても速度分布の観測結果とあわない
4. 中心にいろいろな質量のブラックホールを仮定して、速度分布を計算しなおす
5. χ^2 残差が最小になったところで、「ブラックホール発見!」

実に教科書通りの解析である。

表面輝度

左: Sosin & King 1997, 右: Guhathakurta *et al.* 1996.

これは本当か？

教科書通りの解析でブラックホールがあって論文になるならそれは結構なわけだが、この場合世の中はそんなに甘くない。

球状星団では (この講義の後のほうでででてくる理由で) 系が熱力学的に進化しており、 M/L が一定という仮定が成り立たないため。

大雑把な話: 星の系も普通のガスと同じようにエネルギー等分配を成り立たせようとする。

速度分散が初め同じだとすると、重い星は軽い星にエネルギーを与えて速度を小さくしようとする。

等分配に向かう進化の結果

ガスなら重い (分子量が大きい) ものの速度が小さくなるだけ。

恒星系ではジーンズの定理というものがある

重い星が軽い星にエネルギーを与える$=$分布関数 f が星の質量に依存する

重い星はエネルギーが低いところに動く

つまり、エネルギーが低い、より中心近くを運動する軌道に移る

結局どうなるかというと

星の質量分布がある恒星系が熱力学的に進化すると、重い星が中心に集まってくる

球状星団で最も重い星:

- 初期に大質量星が超新星爆発してできた中性子星
- もうちょっと軽い星が進化してできた比較的重い白色矮星

どちらも暗い。

従って、球状星団の M/L が半径によらないと考えるのはかなり無理

多分何か間違ってる。

間違ってるとどうやって示すか？

「多分間違ってる」では人は納得しない

数値シミュレーションで球状星団を生まれた時から現在まで進化させて、速度分散と輝度分布がどうなるか見てみた。

M15 は「コア崩壊型」と呼ばれる、中心に向かってどこまでも密度が上がるタイプの星団なので、現在ちょうどそのような密度 (輝度) 分布になるように初期条件を選んでみた。

星の質量分布とかは普通に太陽近傍の観測から示唆されているものを使う。

結果は Baumgardt et al., ApJ 2003, 582, L21 になった。

速度分散と輝度分布

R [arcsec]
1
10
100
σ_{LOS} [km/sec]
0
1
2
3
Bright stars with V < 19
All stars, including White Dwarfs and Neutron Stars
0.1
1
10
R [pc]

R [arcsec]
1
10
100
1000
n [stars/pc²]
10^6
10^5
10^4
10^3
10^2
10^1
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
Stars with V < 22
White Dwarfs + Neutron Stars
$\rho \sim r^{-1.2}$
$\rho \sim r^{-0.8}$
0.01
0.1
1
10
R [pc]

M/L 一定を仮定して解析

「星だけでは中心で質量が足りなくて、ブラックホールが必要」

つまりどういうことかというと

モデル星団は M15 より軽いので、その分をスケールすると、大体 3000 太陽質量くらいのブラックホールがあるという結論になる。

まあ、そういうわけで、多分ブラックホールではなくて普通に熱力学的な進化の結果中性子星等が中心に集まっているだけであろう。

何故そんな間違いをしたか？

M/L 一定の解析だけでは駄目、というのは観測で論文書いた人も良くわかっていた。

ちゃんと M/L 一定ではない解析もしていた。

Dull et al. ApJ 1997 の、我々のと同じような数値シミュレーションの結果を使った。

M/L 一定ではない観測の解析

これであまり結果が変わらなかったから、彼らは安心して「ブラックホールがある」という結果を発表した。

でも、、、

実は Dull et al. のモデル星団はハッブルのグループの解析より高い速度分散を与えていた。

問題は何であったか？

使っている輝度分布は同じなので、同じジーンズ方程式と同じ M/L プロファイルを使えば同じ速度分散が求まらないといけないのに、違う。

これは実は、 Dull et al. の M/L プロファイルのグラフが大嘘で、横軸が 3 倍間違っていたからだということが後で明らかになった。

Dull et al. のグラフ

で、解析しなおすと、、、

ブラックホールはなくてもいいという、真っ当な結果になってしまった。

教訓

- 理論家が書いたグラフに書いてある「pc」とか「arcmin」とかの単位を信じてはいけない。ちゃんとクロスチェックすること。

ビリアル定理

ジーンズ方程式から、さらに空間全体のモーメントをとる。

式68において、密度 ν を質量密度 ρ で置き換え、さらに x_k を掛けて空間全体で積分する。

$$\int x_k \frac{\partial(\rho\bar{v}_j)}{\partial t} d^3\mathrm{x} = -\int x_k \frac{\partial(\rho\overline{v_i v_j})}{x_i} d^3\mathrm{x} - \int \rho x_k \frac{\partial\Phi}{x_j} d^3\mathrm{x} \tag{76}$$

右辺の最初の項は、例によって発散定理を使って書き直せる。

$$\int x_k \frac{\partial(\rho\overline{v_i v_j})}{x_i} d^3\mathrm{x} = -\int \delta_{ki}\rho\overline{v_i v_j} d^3\mathrm{x} = -2K_{kj} \tag{77}$$

これは、運動エネルギテンソル K の定義を与える。ついでに第二項はポテンシャルエネルギーテンソル W と呼ばれるものである。

ビリアル定理(続き)

さらに、 σ^2 の定義を使って、

$$K_{jk} = T_{jk} + \frac{1}{2}\Pi_{jk} \tag{78}$$

但し

$$T_{jk} = \frac{1}{2}\int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3\mathrm{x}, \quad \Pi_{jk} = \int \rho \sigma_{jk}^2 d^3\mathrm{x}, \tag{79}$$

さらに、 j, k についての式と k, j についての式を足してやると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \rho(x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3\mathrm{x} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \tag{80}$$

ビリアル定理(続き2)

さらに、慣性モーメントテンソル

$$I_{jk} = \int \rho x_j x_k d^3\mathrm{x} \tag{81}$$

を導入して、連続の式とか発散定理とかを使うと

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \int \rho(x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3\mathrm{x} \tag{82}$$

で、結局

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \tag{83}$$

これをテンサービリアル定理という。

スカラービリアル定理

今定常状態 （I の時間微分が 0）を考え、さらに上の式のトレースをとってみると、T, Π の定義からこれらの寄与は全運動エネルギー K の 2 倍になる。W の方は、Φ の定義を使えば

$$W = \int \rho \sum_k x_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} d^3\mathrm{x} = \int\int \rho(\mathrm{x})\rho(\mathrm{x}') \sum_k \frac{x_k(x_k - x'_k)}{|\mathrm{x} - \mathrm{x}'|^3} d^3\mathrm{x} d^3\mathrm{x}' \tag{84}$$

ここで x と x' を入れ換えた積分を書き、両方を足すと

$$W = \frac{1}{2}\int\int \rho(\mathrm{x})\rho(\mathrm{x}') \sum_k \frac{(x_k - x'_k)^2}{|\mathrm{x} - \mathrm{x}'|^3} d^3\mathrm{x} d^3\mathrm{x}' = \frac{1}{2}\int \rho\Phi d^3\mathrm{x} \tag{85}$$

というわけで、 W は系の全ポテンシャルエネルギーである。

スカラービリアル定理(続き)

結局、

$$2K + W = 0 \tag{86}$$

が成り立つ。これを、スカラービリアル定理、または単にビリアル定理という。

今、系の全エネルギーを E とすれば、 $E = K + W$ であるから、

$$E = -K = W/2 \tag{87}$$

ということになる。つまり、定常状態にある自己重力恒星系では、必ず全エネルギーはポテンシャルエネルギーのちょうど半分であり、絶対値が運動エネルギーに等しい。これは球対称とかそういう仮定なしに常に正しい。

系の「比熱」

自己重力系は熱平衡ではありえない。しかし、 King model のように近似的に熱平衡なものもあるので、ここでエネルギーの出入りに対する系全体の応答、つまり比熱というものを考えてみる。

ビリアル定理から $K = -E$、つまり、「エネルギーを奪うと運動エネルギーが増え、逆ならその逆になる」。つまり、見かけ上比熱が負になっている。これは重力が効く系では普通のことで、例えば地球を回る人工衛星といったものでも同様のことが起こっているわけである。

この、「見かけ上比熱が負」ということが、熱力学的不安定を通して構造形成（自己組織化）が起きる基本的な理由である。

回転系の偏平度（あるいは楕円銀河の回転）

z 軸まわりに対称な、回転している銀河を考える

ポテンシャルテンソルについては対称性から

$$W_{xx} = W_{yy}; \quad W_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \tag{88}$$

で、運動エネルギについても同様にクロスタームは消えるので、結局テンソルビリアル定理で残るのは

$$2T_{xx} + \Pi_{xx} + W_{xx} = 0; \quad 2T_{zz} + \Pi_{zz} + W_{zz} = 0 \tag{89}$$

の 2 つだけである。この 2 つから、

$$\frac{2T_{xx} + \Pi_{xx}}{2T_{zz} + \Pi_{zz}} = \frac{W_{xx}}{W_{zz}} \tag{90}$$

回転系の偏平度 続き

今、子午面環流みたいなのはないとすれば、 $T_{zz} = 0$ で、

$$2T_{xx} = \frac{1}{2}\int \rho v_\phi^2 d^3\mathrm{x} = \frac{1}{2}Mv_0^2 \tag{91}$$

（これは v_0、つまり平均の回転速度の定義）。同様に

$$\Pi_{xx} = M\sigma_0^2 \tag{92}$$

これは横から見たランダム速度の平均 (r.m.s)

z 方向については x 方向との速度分散の異方性パラメータ δ を導入して

$$\Pi_{zz} = (1-\delta)\Pi xx \tag{93}$$

と書いておくことにする。

回転系の偏平度 続き2

まとめると

$$\frac{v_0^2}{\sigma_0^2} = 2(1-\delta)\frac{W_{xx}}{W_{zz}} - 2 \tag{94}$$

ということになる。

W_{xx}/W_{zz} と、銀河の「形」の関係については:

一般に密度が以下のように書ければ

$$\rho = \rho(m); \quad m^2 = a_1^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2} \tag{95}$$

つまり、密度が軸比一定の楕円体の表面上で一定なら、W_{ii}/W_{jj} は a だけの関数で $\rho(m)$ の関数形によらない

回転系の偏平度 続き3

実際に書くとかなり面倒な形をしているので、具体的な形は Binney and Tremaine(以下BT) をみてもらうことにして、結果だけを使うと、

速度の非等方性δ と偏平度 $\varepsilon 1-b/a$を決めれば $\frac{v_0}{\sigma_0}$ が決まる。

回転系の偏平度 続き4

BT の図:

The relationship between the rotation parameter v/σ and
redicted by (4-95) for elliptical galaxies whose isodensity

-6. (a) The positions in the $(v/\sigma, \epsilon)$ plane of elliptical galaxies (dots), and
ids (crosses), that have luminosities smaller than $L = 2.5 \times 10^{10}\,\mathrm{L}_\odot$. (b)
e as (a) but for elliptical galaxies brighter than $L = 2.5 \times 10^{10}\,\mathrm{L}_\odot$. (After
al. 1983.)

左: ε の関数として $\dfrac{v_0}{\sigma_0}$ がどう変化するか

右: 実際の観測結果と $\delta = 0$ の線を重ねた。

回転系の偏平度 続き5

- 暗い楕円銀河は $\delta = 0$ の線に近いところに集まっている
- 明るいものは可能な範囲全体にあり、どちらかというと下の方（回転が小さく、おそらく異方性が大きいほう）に集まっている

これは多分できかたが違うことと関係している。

とはいうものの、どうやってできたかということに対する標準的な理解というものがあるわけでは必ずしもない。

ここでは、せっかくなので一つの考え方として、合体説（楕円銀河のうち、特に大きいものは銀河同士の合体でできた）をとった場合にはどのような説明が可能かということを見てみる。これ以外の解釈がないというわけではない。

回転系の偏平度 続き6

Ratio of the maximum rotation velocity to the central velocity dispersion $_{x}/\sigma_0$) plotted against the ellipticity (ϵ). Three vertices of triangles indicate umerical results observed from the a-, b-, and c-axes. The open circles indicate vational luminous ellipticals ($M_B < -20.5$); the filled circles indicate less nous ellipticals ($M_B > -20.5$). The data were taken from Davies et al. (1983).

Okumura *et al.* (1991, PASJ 43, 781) **によるシミュレーションの結果との比較**

回転系の偏平度 続き7

2つの等方的で回転を持たないプラマーモデルを２つ放物軌道でぶつけた

番号順に最初の軌道の近点距離が大きくなる（ 4 で $r_p/r_h = 2.6$ である）。

番号の大きいものほど軌道角運動量が大きいので、v_0/σ_0 が大きくなる。但し、ある程度より大きくなっていない。合体するためにはかなりの軌道角運動量を捨てないといけないので、残った系が持つ角運動量には上限があるため。

「仮に楕円銀河が合体で出来たとすれば」

暗いものは初期に近点距離の大きな軌道から明るいものは近点距離の小さな軌道からできた。

ジーンズ不安定

ここまで、自己重力多体系の平衡形状を（ごく簡単な場合だけ）扱ってきたが、そろそろ飽きてきたような気もするので、これからは平衡形状ではなく時間発展について考えることにしたい。

時間発展といっても、もとの方程式が強い非線形性を（加速度の項に）持つので、一般的な場合を解析的に扱うなんてことはほとんど出来ない。そこで、まず、平衡状態から無限小だけずれている場合に対して線形化した発展を考えるということにする。さらに、話を簡単にするために、「無限一様」な平衡状態とし、まず CBE ではなく流体の話を考える。

流体のジーンズ不安定

流体は、連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathrm{v}) = 0 \tag{96}$$

オイラー方程式

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + (\mathrm{v} \cdot \nabla)\mathrm{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla \Phi \tag{97}$$

ポアソン方程式

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \tag{98}$$

で記述される。あ、あと状態方程式がいる。これはいま圧力が密度だけの関数で与えられるとする。(断熱でも等温でもなんでもいいが)

線型化

今、 $\rho, p, \mathrm{v}, \Phi$ をそれぞれ $\rho = \rho_0 + \rho_1$ という格好にして、添字 0 がつくものはもとの方程式の平衡解であり、 1 がつくものは小さい（二次以上の項を無視していい）として方程式を書き直すと、 v_s を音速として

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathrm{v}_1) + \nabla \cdot (\rho_1 \mathrm{v}_0) = 0 \tag{99}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial t} + (\mathrm{v}_0 \cdot \nabla)\mathrm{v}_1 + (\mathrm{v}_1 \cdot \nabla)\mathrm{v}_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0^2}\nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0}\nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \tag{100}$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 \tag{101}$$

$$p_1 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \rho_1 = v_s^2 \rho_1 \tag{102}$$

無限一様の時

既に述べたように、無限一様でいたるところ密度、圧力が等しいというのが平衡で、速度も0だったとすると、上の2本は

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \nabla \cdot (\rho_0 \mathrm{v}_1) = 0 \tag{103}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \tag{104}$$

となる。下2本は見かけはかわらない。これを、 ρ_1 だけの式にすれば

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0 \tag{105}$$

めでたく方程式が線形化されたので、分散関係を求めれば算数はおしまい。どういう方程式か 見ておこう。

定性的な理解

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0 \tag{106}$$

最初の２項をみれば普通の波動方程式で、最後の項がポアソン方程式を通してでてくる重力の項である。したがって、波長が短い極限では普通の波動方程式に近付く。これに対し、波長が長い極限では空間２階微分の項が効かなくなるので、線形の常微分方程式になってしまう。

分散関係

実際に分散関係を求めるために、解を

$$\rho_1 = Ce^{i(\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}-\omega t)} \tag{107}$$

として代入すれば

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0 \tag{108}$$

ということになる。

分散関係(続き)

$$k_J^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} \tag{109}$$

と書くと、

- $k > k_J$ なら ω は実数。この時は解は振動的（普通の音波と同じ）
- $k = k_J$ なら $\omega = 0$ で、与えた摂動は時間発展しない（中立安定）
- $k < k_J$ なら ω は純虚数。この時は解は減衰する解と発散する解の両方がある（不安定）。

分散関係(続き2)

定性的に見たときにわかったように、波長が短ければ普通の音波として振舞うが、波長が $1/k_J$ より長いと時間の指数関数で進化することになる。つまり、密度が上がり始めたらどんどんあがる（下がり始めたらどんどんさがる）ということになる。

恒星系でのジーンズ不安定

何度も出てきたがもう一回式を書いておく。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \tag{110}$$

ここで f は6次元位相空間での分布関数である。Φ は重力ポテンシャルであり、以下のポアソン方程式の解として与えられる。

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho. \tag{111}$$

G は重力定数であり、 ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int d\mathbf{v} f, \tag{112}$$

である。これを流体の時と同様に線形化して、その振舞いを調べる。

線型化

分布関数を $f_0 + f_1$、ポテンシャルを $\Phi_0 + \Phi_1$ とし、添字 0 がつくほうは定常解であるとして式を整理すれば

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathrm{v} \cdot \nabla f_1 - \nabla \Phi_0 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathrm{v}} - \nabla \Phi_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathrm{v}} = 0, \tag{113}$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = -4\pi G \int f_1 d\mathrm{v}. \tag{114}$$

ということになる。これが線形化された無衝突ボルツマン方程式である。

Jeans 不安定

ここではもっとも簡単に解析できる場合として空間分布が一様な場合を考える。これから f_0 は速度だけの関数であり、 Φ_0 は定数としていいことになるので

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathrm{v} \cdot \nabla f_1 - \nabla \Phi_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathrm{v}} = 0, \tag{115}$$

と少し式が簡単になる。まず、流体の場合と同じような平面波型の解を考えてみよう。

$$f_1 = f_a(\mathrm{v}) \exp[i(\mathrm{k} \cdot \mathrm{x} - \omega t)] \tag{116}$$

$$\Phi_1 = \Phi_a \exp[i(\mathrm{k} \cdot \mathrm{x} - \omega t)] \tag{117}$$

を

平面波型の解

速度空間の方にも伝わっていく波とかいうのも考えられないわけではないが、とりあえずそういうのは考えない。これらを線形化した式に入れれば

$$(-\omega + \mathrm{v}\cdot\mathrm{k})f_a(\mathrm{v}) - \Phi_a \mathrm{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathrm{v}} = 0 \tag{118}$$

$$-k^2\Phi_a = 4\pi G\int f_a d\mathrm{v} \tag{119}$$

となる。これらから f_a を消せば、 Φ_a も落ちて

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2}\int \frac{\mathrm{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathrm{v}}}{\mathrm{k}\cdot\mathrm{v} - \omega} d\mathrm{v} = 0 \tag{120}$$

となって、f_0 が与えられていれば k と ω の関係、すなわち分散関係を与える。

臨界点

分散関係

$$\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{4\pi G}}{\boldsymbol{k^2}} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}} d\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{121}$$

はちょっと困った式で、 $\mathrm{k} \cdot \mathrm{v} - \omega = 0$ **が特異点になっている。したがって、実数の振動数を考えるのはすこし厄介な話になる。まず、臨界点、すなわち振動数が** 0 **の場合と、不安定、すなわち振動数が純虚数の場合を考えよう。**

臨界点(続き)

式が繁雑なので、いま、波数ベクトルを x 軸方向にとることにすると、分散関係は

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial v_x}}{k v_x - \omega} d\mathrm{v} = 0 \tag{122}$$

臨界安定で $\omega = 0$ とすれば、結局

$$k_J^2 = -4\pi G \int \frac{\frac{\partial f_0}{\partial v_x}}{v_x} d\mathrm{v} \tag{123}$$

となる。 f_0 が $v_x = 0$ で有限で微分可能なら積分は求まるので、これから $\omega = 0$ となる波数 k_J は決まる。

流体との対応

速度分布 f_0 をマックスウェル分布

$$f_0(\mathrm{v}) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{124}$$

にしてみる。これは例によって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv = \sqrt{2\pi\sigma^2} \tag{125}$$

を使って全部積分できて、

$$k_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{\sigma^2} \tag{126}$$

となる。これは、流体の場合と同じになっている。つまり、中立安定な波長（ジーンズ波長）は、恒星系と流体で同じである。

不安定な場合

次に、振動数が純虚数の場合を考えてみる。この時は、$\omega = i\gamma$ として元の式にマックスウェル分布を入れて整理すると

$$1 + \frac{2\sqrt{2}\pi G\rho_0}{k\sigma^3}\int \frac{v_x e^{-v_x^2/2\sigma^2}}{kv_x - i\gamma}dv_x = 0 \tag{127}$$

ここで、被積分関数の分母を実数にするために

$$\frac{v_x(kv_x + i\gamma)e^{-v_x^2/2\sigma^2}}{k^2v_x^2 + \gamma^2}dv_x = 0 \tag{128}$$

と書き直すと、虚部は奇関数なので落ちる。

不安定な場合(続き)

実部は

$$\int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x^2}}{x^2+\beta^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\pi\beta e^{\beta^2}[1-\mathrm{erf}(\beta)] \tag{129}$$

なる関係を使って

$$k^2 = k_J^2 \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\pi}\gamma}{\sqrt{2}k\sigma} \exp\left(\frac{\gamma^2}{2k^2\sigma^2}\right) \left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}k\sigma}\right)\right] \right\} \tag{130}$$

なんだかよくわからないが、まあ、 k と ω (γ) の関係を与えてはいる。 $k < k_J$ なら、ある実数 γ（正負どちらでも）があって上を満たす。ただし、 $k = k_J$ の場合と $k = 0$ の極限を除いては、値は流体の場合とは一致しない。

不安定な場合(続き2)

というわけで、波長がジーンズ波長よりも長いモードは流体と同様不安定で、勝手に成長することになる。

van Kampen mode

さて、それでは、音波に当たるような振動数が純実数のモードというものはあるのだろうか？これについては、標準的な教科書でも若干混乱した記述がなされていることがある。以下、van Kampen の論文 (1955, Physica, 21, 949) に沿った理解を試みることにする。

van Kampen mode(続き)

分散関係の一つ前の式に戻ってみると、

$$(-\omega + \mathrm{v}\cdot\mathrm{k})f_a(\mathrm{v}) + \frac{4\pi G}{k^2}\mathrm{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathrm{v}}\int f_a d\mathrm{v} = 0 \tag{131}$$

となっている。面倒なのでまた y, z 方向についてはあらかじめ積分すると、

$$(-\omega + kv_x)g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G v_x}{k}f_0(v_x)\int g dv_x = 0 \tag{132}$$

ただし、g は f_a を y, z 方向に積分したものである。また、f_0 は等方的であるとした。

van Kampen mode(続き2)

上の式は g についての線形斉次な方程式で、

$$g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G}{k}\frac{v_x f_0(v_x)}{\omega - kv_x} \tag{133}$$

という解を持つ。ここでは、$\int g dv_x = 1$ となるように規格化した。ただし、意味のある解であるためには

$$-\frac{8\pi^2 G}{k}\int \frac{v_x f_0(v_x)}{\omega - kv_x} dv_x = 1 \tag{134}$$

を満たすようになっている必要がある。これは、最初に出した分散関係と実は同じ式である。

van Kampen mode(続き3)

最初にもいったように、分散関係の式がよろしくないのは $v = \omega/k$ で積分が特異になるからである。意味のある解を求める一つの考え方は、 g を超関数に拡張してしまうことである：

$$g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G v_x f_0(v_x)}{k}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\omega - kv_x} + \lambda\delta(\omega - kv_x)\right] \tag{135}$$

ここで $\mathcal{P}$ は主値をとるということで、要するに積分の不定性を δ 関数のほうに押しつけてみたというだけである。実際に、規格化を満たすという条件から λ の値を決めることができる。この「モード」は、任意の ω と $k > k_J$ なる k のすべての組合せに対して存在する。これを van Kampen mode という。

van Kampen mode(続き4)

$$g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G v_x f_0(v_x)}{k}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\omega - kv_x} + \lambda\delta(\omega - kv_x)\right] \tag{136}$$

δ 関数の分は、$v_x = \omega/k$ のところにだけ値があるということを示している。つまり、位相速度が摂動を受けていないもともとの速度と等しい、いいかえれば与えたものがそのままラグランジュ的に動いていくようなものである。これは、いま重力がまったくない極限を考えれば、単に摂動がまわりと相互作用することなくそのまま動いていくというものであると考えられる。これにたいして、もう一つの項は重力による応答を示していると考えていい。

Phase Mixing

任意の摂動が、減衰しないモードの組合せとして表現できるのなら、それはなにか音波のような伝わっていく波になっているのであろうか？

実はそんなことはない。これは、以下の簡単な例で示すことができる。

1 次元で、重力がない系である有界な領域に摂動 (overdensity) を与えたとする。で、簡単のために周期境界で、右から出ていったものが左から入ってくるとしよう。もちろん、ちゃんと適当なポテンシャルを考えるとか、無限一様な場合を考えるとかしても本質は同じである。（無限一様な場合は、単に周期的な摂動を与えたというのに対応する）

Phase Mixing (続き)

すると、時間がたつに従って摂動が引き延ばされていくということがわかる。このために、例えば密度の変化といった量は時間がたつにしたがって減衰していく。

つまり、singular な van Kampen mode 自体は減衰しないが、それを重ね合わせた有限の広がりを持つ摂動は減衰する。これが通常 phase mixing と呼ばれるものである。

Landau Damping

複素数の ω があると信じて、そういう解を求めると、ちゃんとそういうものが見つかる。逆にいえば、解が指数関数の形に書けると仮定すれば、ジーンズ波長より短ければそれは指数関数的に減衰するわけである。

今、簡単のために重力がない一次元系を考える。初期の波数が k であるような摂動は

$$f_1(x, v, t) = g(v) \exp[ik(x - vt)] \tag{137}$$

という形をしているということにしよう。これは、自明な解になっているということは式を良く見ればわかる。

注意:、これは最初に安定性解析の時に仮定した $f_a(v) \exp[i(kx - \omega t)]$ という形とは違う

Landau Damping (続き)

関数形の違い: 振動数 ω が v そのものであり、速度空間のなかでの位置に依存するため

このことをいいかえると、上のような「自然な」解があるにもかかわらず、モード解析をすると van Kampen mode のような singular なものが出てくるのは、モード解析の仮定として位相速度が粒子の速度に寄らないようなものを考えたからであるともいえる。

Landau Damping (続き2)

$$f_1(x,v,t) = g(v)\exp[ik(x-vt)] \tag{138}$$

上の「自然な」解はどのように振舞うかをちょっと見てみよう。
密度は、

$$\rho_1(x,t) = e^{ikx}\int g(v)e^{ivt}dv \tag{139}$$

これから、例えば $g(v)$ が

$$g(v) = \begin{cases} 1/2v_0 & |v| < v_0 \\ 0 & \text{otherwize} \end{cases} \tag{140}$$

みたいなものだと、 $1/t$ で減衰するという解がでてくる。

(線型)Landau Damping の意味

減衰が起きるのは、初期条件が非常に特別なものであるため

速度ごとに波の位相速度が違うのに、初期条件としてその空間位相がすべてそろったものを考えた

時間がたてば位相はずれていくので速度方向に積分して見た波の振幅は小さくなってくことになる。

なお、 $g(v)$ に適当な形を仮定すれば、もっと速く減衰するものも作れる。

無衝突ボルツマン方程式にしたがった進化は可逆過程である（エントロピーを生成しない）ので、原理的には逆に振幅が大きくなるような初期条件も存在する。実際、減衰していく解で、どこかで時間反転すればそういう解が作れるわけである。

減衰の意味

ジーンズ波長より短い摂動の（線形での）減衰は、無衝突系に固有の現象であり、流体ではこれに対応するものはない。ここでは、まず、その物理的意味についてもう一度考え直して置こう。

$$f_1(x, v, t) = g(v) \exp[ik(x - vt)] \tag{141}$$

初期の摂動の位相が v によらないとすれば、その時間発展は上式で与えられる。したがって、密度はこれを v で積分したものであり、式をじっとみればわかるように $g(v)$ のフーリエ変換になっている。したがって、$g(v)$ を選べばいろんな時間依存を持つものが作れることになる。

減衰の意味(続き)

無衝突系ではエントロピー生成はない。これは、分布関数 f が軌道にそって保存するからであった。しかし、上の式からわかるように、速度方向の構造は、時間がたつにしたがってどんどん細かくなっていってしまう。これに対して、実際の系では粒子数が有限であり、分布関数に無限に細かい構造をつくることが出来るわけではない。また、観測するとか、数値計算するとかいうことを考えると、どこかで分解能よりも構造が細かくなってしまうことになる。

粗視化

通常のエントロピーは

$$S = \int f \ln f dxdv \tag{142}$$

であるわけだが、これを適当な分解能で荒く見たものを考えてみよう。それにはいろいろな考え方があるが、ここでは適当なフィルタ $g(x, v; h)$ というものを考え、

$$\int g(x, v; h) dxdv = 1 \tag{143}$$

$$\lim_{h \to 0} \int f g(x_0 - x, v_0 - v; h) dxdv = f(x_0, v_0) \tag{144}$$

というようなもの、つまり、適当な極限で δ 関数になるようなものを考える。

粗視化された分布関数

粗視化された分布関数 $\hat{f}_h$ というものを

$$\hat{f}_h = \int f g(x - x_1, v - v_1; h) dx_1 dv_1 \tag{145}$$

と定義する。

ちゃんと計算して見せた方がもちろんいいんだけど、結局どういうことがいえるかっていうと、粗視化されたエントロピー

$$\hat{S} = \int \hat{f} \ln \hat{f} dx dv \tag{146}$$

というものを考えると、これは増えるということである。

というわけで、どういう風に増えるかってのは計算練習。

粗視化されたエントロピーの増大

「粗視化されたエントロピーは増える」という性質は、平衡からのずれが線形でも非線形でも変わらない。

言い換えれば、仮にいま平衡状態から遠くはなれたものをなにか考えたとして、その時間進化を適当に粗視化したエントロピーで見たとしよう。そうすると、$\hat{S}$ は時間がとともに増えて、そのうちにある定常値に達する。しかし、これは、あくまでも速度空間での分布関数の構造が粗視化のために分解できなくなったというだけで、系が物理的に熱平衡状態に向かって進化しているわけではないことに注意しなければならない。

非線形 Landau Damping

ちょっとここで話を変えて、非線形 Landau Damping というものを考えてみる。これはつまり、摂動の作る重力が無視出来ないような時にその摂動がどう振舞うかということである。

この解析は実は結構難しい。というのは、もともと線形 Landau damping というか phase mixing というものはあるので、非線形性が効くかどうかに無関係に摂動はどんどん減衰していくからである。しかし、とりあえず、非線形な効果を考えるとどんなことが起きるかをちょっと整理してみる。

非線形 Landau Damping (続き)

とにかくポテンシャルの波というのがあって、速度 v_w で動いているとする。これに対して速度 v_p で動いている粒子があるとしよう。この粒子と波の相互作用というものを考えてみる。

$v_p \sim v_w$ 、つまり大体同じ速さで動いていることにすると、粒子はその波に対する相対的位置によって受ける力の方向が変わる。波に対して遅れていれば引っ張られるし、そうでなければ減速される。このため、初期にどういう位相にいたかによって、大きくエネルギーをもらったり失ったりするものがあることになる。

非線形 Landau Damping (続き2)

波が無限に長い間維持されていれば、無制限にエネルギーをやりとり出来るわけではない。

座標変換して波が止まっている座標でみれば当然のことで、あるポテンシャルの谷のなかに止まっているか、それとも超えて動いていくかのどちらかであって平均すればエネルギーのやりとりは起きないことになる。

もっとも、ここで波がまた指数関数的に減衰しているはずとか過程するといろんなことが起きるが、省略。

Dynamical Friction

少し違った状況を考えてみる。今、温度 0 の、無限に一様な物質分布の中を、適当な大きさを持った球対称なポテンシャルの摂動（質点によるものでも OK）が動いているとしよう。

バックグラウンドの物質がどう動くかを考えると、質点の方に固定した座標系では図のように、平行に入ってきたものが散乱されるだけである。

Dynamical Friction (続き)

ここで、しかし、もともとの止まっていた物質分布に固定された座標系で考えると、散乱されたものは、左向きと中心向きの速度をもらうことになり、ネットに加速されている。つまり、エネルギーをもらっている。

Dynamical Friction (続き2)

回りがネットにエネルギーをもらっているので、動いている質点のほうは減速される $=$ dynamical friction

別に動いているものが単純な質点のポテンシャルとかでなくても、3次元空間のなかで有界なものが動いていれば常に働く

つまり、一方向に進む平面波というようなものを考えるとネットにエネルギーのやりとりは出来ないが、孤立波とか非周期的な摂動とかを考えるとちゃんとそれが非線形なダンピングを受けることになる。

Dynamical Friction (続き3)

このように、摂動と回りの相互作用を考えれば、実際にエネルギー交換がおきてそれが摂動のエネルギーを回りに伝えるということ自体は起こり得る。

ただし、この場合でも、やはりエントロピー生成はないということは依然として注意が必要である。 Dynamical Friction の例では、質点の運動エネルギー（これはエントロピーを持たない）が回りの粒子の運動に変換されたわけだが、回りの粒子の運動は依然としてシステマティックなものでありランダム成分を持たないので、エントロピーは生成されていないのである。

Violent relaxation

ここまで述べてきたことは、

- 線形 Landau damping では、粗視化エントロピーを増やすことができる。
- 非線形 Landau damping では、線形の phase mixing 以外の要因で粗視化エントロピーが増えるわけではない。

とまとめることができる。

線形 Landau damping では粒子のエネルギーが変わらないので、通常の意味で熱平衡に近付いているのではないということはあきらか。

非線型の場合は？

しかし、非線形の場合はどうだろう？エントロピーが生成されていないからといって、なんらかの意味で熱平衡に近付いていないと断言できるだろうか？

このような問題意識には、観測的な理由もないわけではない。それは、楕円銀河というものの存在である。

楕円銀河というのは、結構たくさんあるわけだが、これはどれも似たような形をしている。これはたんに形が似ているというだけではなく、実は、半径方向の密度（表面輝度）分布に比較的に共通性が高いということがわかっている。具体的には、いわゆる $r^{1/4}$ 則、あるいは Hernquist Profile で良く近似できているわけである。

Violent Relaxation

楕円銀河がどういうふうにして出来たかは良くわかっていないが、初期条件がどれもこれも非常に良く似ていたというのはあまりありそうにない。それにも関わらず、みんなが良く似た形をしているというのは、なんらかの熱平衡にむかうような緩和過程の存在を示唆しているのかもしれない。

というようなことを考えて、Lynden-Bell (1967) は violent relaxation というものを提案した。彼の論理は、大雑把にいうと次のようなものである

Violent Relaxation (続き)

- 系がまだ力学平衡に落ちついていないあいだ、密度分布、したがってポテンシャルは複雑な時間変化をする。これは、それぞれの粒子エネルギーを変える。
- 粒子のエネルギーの変わり方は初期の位置（位相空間内での）によって決まるので、エントロピーが変わるとか、ランダム化されるとかいうことはないが、粗視化してみれば粒子のエネルギーの変わり方はランダムとみなせるはずである。
- 従って、このランダムな変化に対する熱平衡が存在するはずである。これを Lynden-Bell 統計と名付ける。

Violent Relaxation (続き)

というわけで、

- 力学平衡に向かう間は、単に phase mixing だけが起こっているわけではなくこの Lynden-Bell 統計に向かう進化も同時に起きているはずである。

なお、Lynden-Bell 統計であって普通の Maxwell-Boltzman 統計には従わない理由は、 f の値に制約がある（初期の分布の最大値を超えられない）からであるそうである。

Lynden-Bell は大変偉い先生であるので、この提案は大きな影響力を持った（現在も持っている）。

帰結

violent relaxation によって起きる緩和は、いくつかの点で通常の熱平衡に向かうものと異なっている。

- 系がまだ力学平衡に落ちついていないあいだ、密度分布、したがってポテンシャルは複雑な時間変化をする。これは、それぞれの粒子エネルギーを変える。
- 等分配が働かない。これは、（単位質量当たりの）エネルギー変化が位置だけで決まるからである。
- 通常の意味で平衡に近付くかどうかは本当はわからない。
- 緩和がどの程度進むかはわからない。力学平衡に落ちつけばエネルギー変化は止まってしまうからである。

数値実験とその解釈

理論だけではどうなるかよくわからないのでいろんな人が数値計算もした。

以下、 van Albada (1982, MNRAS 201, 939) の結果紹介

計算コード: 極座標でポアソン方程式を球面調和関数展開してポテンシャルを求める

1982 年に $N = 5000$

粒子の数の意味についてはまたあとで

初期条件:

粒子に少しだけランダム速度を与える。

大体球状（実際には、いろいろ変化させているが）に分布。

$N(E)$ のプロット

$N(E)$ の定義: $N(E)dE = dN$

「あるエネルギー範囲にある粒子の数」

数値計算では簡単に求まる。分布関数は難しい。

結果の解釈

- 初期分布は狭い
- 最終状態は広がっている

つまり: ある程度まで violent relaxation というものが起こっている

ある程度とはどの程度か？

初期のエネルギーと落ちついた後のエネルギーの関係

非常に強い相関が残っている

つまり？

もともとエネルギーが低かったものは相対的に低いまま、高いものは高いままに留まる傾向がある。

十分に緩和した、とはいいがたい。

色々見ると

Figure 7. Histogram of binding energies for the final equilibrium models.

さまざまな初期条件からの結果のまとめ。

初期条件によって、 $N(E)$ はいろいろであり、とてもある一つのものに向かうといえるようなものではない。

数値実験のまとめ

Lynden-Bell が主張したような violent relaxation は、全く働かないというわけではないが十分に熱平衡に近い状態を実現できるほど有効に働くわけでもない。

このために、無衝突系の最終状態は初期条件の記憶を強く残している。

Violent relaxation （続き）

楕円銀河がそれなりによく似ている理由は violent relaxation の他にあるか？

一応 2 つほど紹介。

$N(E)$ の連続性

楕円銀河は円盤銀河とはちがった何らかの力学的な進化、すなわち Lynden-Bell が想定したような系全体の振動のようなものを経験している、とは考えてもよさそう。

それからなにかいえることは？

実は、分布関数が特徴的な性質をもつであろうということが直接にいえる。このことは「何となく」理解されていた。

ある程度明確に述べたのは、IAU Symposium 127 “Structure and Synamics of Elliptical Galaxies” での Scott Tremaine (Conference Summary) と W. Jaffe (Poster) の発表

以下 Jaffe にしたがって簡単にまとめる。

$N(E)$ の連続性 (2)

何らかの原因、例えば他の銀河と合体するとか、合体しないまでも近くを通り過ぎるとかで大きな振動が励起されたとする。すると、それが構成する各粒子のエネルギーを変化させることになる。

- 粒子のなかには、エネルギーが正になってそのまま無限遠にいってしまうものもある。
- 正でなくても、エネルギーがある程度 0 に近ければ、一旦遠くにいって、また戻ってくる頃には系はほとんど落ちついているので、それ以上エネルギーが変化するということはない。

エネルギーが 0 に近い粒子の分布はどうなるか？

$N(E)$ の連続性 (2)

普通の熱平衡: この辺に無限に沢山粒子がある。

- 単純に位相空間の体積が発散しているため。
- 等温モデルが有限質量にならないのはこのため。

さっきのできかたを考えると有限個。つまり、エネルギーが 0 に近い粒子というものは確かに作られるが、その分布は熱平衡を満たすようにはならない。

ではどうなると考えられるであろうか？

エネルギーが 0 付近の分布

粒子は自分のエネルギーが正になってしまうかどうかを知っているわけではないし、どれくらいの phase volume があるかどうかということを知っているわけでもない。

エネルギーが0に近い粒子の分布は、$N(E)$が 特異でない（発散したり 0 にいったりしなくて、おそらく微分可能である）ということによって特徴付けられるはず。

実際、前回例に出した van Albada の数値実験では多くの場合にそうなっていた。

$N(E)$ は、$E = 0$ の付近、すなわち、大雑把にいって$r \to \infty$ の極限で、 $N(E) = N_0 + N_0' E \cdots$の形の展開を持ち、特に $N_0 > 0$ である。

$N(E)$から分布を？

$N(E)$ だけから空間構造とかでるか？角運動量は？

という問題はあるけどちょっと考えてみよう。

「十分外側」を考えるので、ポテンシャルは

$$\Phi = -M/r \tag{147}$$

で与えられるとする。単純な例として、すべての粒子が円軌道を回る、すなわち最大の角運動量を持つ場合を考える。

$$E = -\frac{M}{2r} \tag{148}$$

である。つまり、エネルギーが決まれば中心からの距離が決まる。密度を求めるにはヤコビアンを計算すればいい。

円軌道の場合続き

つまり

$$dM = |4\pi r^2 \rho dr| = |N(E)dE| \tag{149}$$

と、式148からでる

$$\frac{dE}{dr} = \frac{M}{2r^2} \tag{150}$$

から、

$$\rho = \frac{MN(E)}{8\pi r^4} \tag{151}$$

を得る。

つまり、密度は 半径の -4 乗。実は色々なモデルで外側は -4 にしているのは理論的にはこう、と思っているせいもある。

円軌道以外では？

等方的でも同じ: Jaffe (1987) が示した。

でも、強く非等方なら？多分実際はそうだし。

逆の極限、すなわち、すべての粒子が角運動量を全く持たない場合にも円軌道と同じ結果になることがわかる。これは、実際に軌道が解けるので、エネルギーごとにある位置への滞在確率を求めて積分すれば密度が求まるが、その式から結局滞在確率が外にでてしまうからである。

直線軌道の時

あるエネルギー E の粒子が、中心からの距離がある範囲 $(r, r+dr)$ にいる確率が $P(E,r)dr$ で書けるとすれば、密度は

$$4\pi r^2 \rho = \int_{E_r}^{0} P(E,r) N(E) dE \tag{152}$$

で与えられる。ここで E_r は距離 r に到達できるエネルギーの最小値であり、$-M/r$ で与えられる。いま、ケプラーポテンシャルのなかでの直線軌道を考えているので、 $P(E,r)$ は書き下すことができ、特に

$$P(E,r) = P_0(r/r_E)/r_E \tag{153}$$

の形に表現できる。ここで $r_E = -M/E$ である。

直線軌道の時の続き

さらに $x = rE/M$ という変数変換を行なって適当に整理すると、

$$\rho = \frac{M}{4\pi r^4}\int_{-1}^{0} -P_0(x)xN(Mx/r)dx \tag{154}$$

これから、 $r \to \infty$ の極限で、積分の中が収束することがわかる。従って、すべてが radial orbit の場合も円軌道の場合もおなじことになる。

一般に J に分布があったらどうか?というと、これは、$N(E, J)$ の形で実際に分布を与え、J についての依存性にどのような制約があれば上と同様の結果が得られるか調べればわかる。ここでは結論だけを述べておくと、かなりゆるい条件のもとでOKであることがわかっている。

$N(E)$ についてのまとめ

結局、比較的一般的な条件として、自己重力系で力学平衡から大きくずれた振動などを経験した場合には、$N(E)$ が $E \sim 0$ で連続という条件から、 $\rho \sim r^{-4}$ という結論が出せる。これは、前にモデルのところででてきた Hernquist model や Jaffe model に共通な性質であり、これらは、（中心部の構造が全く違うにも関わらず）どちらも楕円銀河に良く合うとされている。「観測的に楕円銀河の性質が共通である」というのはその程度の意味であると考えるべきかもしれない。つまり、基本的には外側のほうで $\rho \sim r^{-4}$ に漸近していくような構造というのが本質ではないかと考えられる。

中心部の構造

中心部の構造についてはなにかいえないのであろうか？10 年ほど前に、 Navarro たち（ApJ 1997, 490, 493) は、数値計算の結果をもとに以下のような主張をした

- CDM シナリオによる構造形成を考えた時、 CDM が作る自己重力系（ガスとか星を考えない）は以下の形に書ける

$$\rho \propto \frac{1}{r_*(1+r_*)^2} \tag{155}$$

- この形はユニバーサルで、例えば一つの銀河でも銀河団でも同じである

これは、極めて有名になった NFW プロファイルである。

中心部の構造 続き

実は、Navarro たちの結果の解釈は割合すぐに異論がでた。

CDM と初期条件を制限しても、例えば Fukushige and Makino (ApJ 1997, 477 L9) とか Moore et al. (ApJ 1998, 499, 5L) は「ユニバーサル」な形になったのは数値誤差のせいとかいう主張した。

そのへんの人の結果では Navarro たちのものより中心で等温に近い、 -1.5 くらいのスロープ。

Navarro らの結果は 1 万粒子程度であるが、Fukushige ら、Moore らは 100 万粒子程度。

多分大きいほうが信用できる。

中心部の構造 続き2

つまり、現状では、中心部（というか、half mass radius より内側）の構造は、

- 第0近似としては半径の -1.5 乗程度のカスプになる。
- どういうメカニズムでそうなるかはまだよくわからない

という状況であるといえる。