

基礎宇宙物理学I 自己重力系の力学

牧野淳一郎

国立天文台理論研究部/天文シミュレーションプロジェクト

平成 19 年 8 月 1 日

「教科の手引き」に書いてあること

重力は自然界の4つの力の中で、最も弱い力であるにもかかわらず、宇宙における天体の構造や進化をもっとも特徴づけている力である。例えば、恒星の内部構造、惑星系の運動とその安定性、星団の成り立ち、銀河の構造や進化、宇宙の大規模構造など、これらは重力が引き起こす多様で複雑な自然現象の発現と言える。そこで、本講義では、天体の構造、進化、そして形成の理解に必要な、重力多体問題の基礎的概念の理解に力点をおいて授業を展開する。最終的には、重力多体系の進化を物理的イメージで語る力を身につけてもらいたい。なお、平成19年度は前期に集中講義形式で行なう。開催時期は試験期間後の予定である。成績評価の方法 レポートによる。

なんか難しい。

この講義の目標

- 天文学者、天体物理の研究者を目指す人に、自己重力系について知っておいて欲しいこと

を概観する。もうちょっと具体的には

- 自己重力多体系とはどんなものか
- 力学平衡の概念と力学平衡への進化
- 「熱力学的」あるいは統計力学的な平衡の概念と進化
- 観測的研究との対応
- 最近の研究の話題

といったようなこと。

大体の講義計画

- 初めに:重力多体系ってどんなもの？
 - 銀河、球状星団
 - 銀河群、銀河団、大規模構造
 - 銀河中心
 - 重力多体問題とは？
 - 太陽系に関するいくつかの話題
- 無衝突系の基礎概念
- 衝突系の基礎概念
- 最近の話題

大体の講義計画

- 初めに:重力多体系ってどんなもの？

- 無衝突系の基礎概念

- 基礎方程式、力学平衡
- 衝突系と無衝突系
- ジーンズの定理、 $f(E, J)$, $f(E)$
- いくつかの球対称モデル
- ジーンズ方程式とその応用
- ビリアル定理と負の比熱
- ジーンズ不安定
- Phase mixing、Landau Damping, violent relaxation

- 衝突系の基礎概念

- **最近の話題**

大体の講義計画

- 初めに:重力多体系ってどんなもの？
- 無衝突系の基礎概念
- 衝突系の基礎概念
 - 2体緩和とは何か
 - 無限一様系での2体緩和
 - 熱平衡とその安定性 — 重力熱力学的不安定性
 - 有限振幅での進化
 - 重力熱力学的振動
- 最近の話題

大体の講義計画

- 初めに:重力多体系ってどんなもの？
- 無衝突系の基礎概念
- 衝突系の基礎概念
- 最近の話題
 - 銀河中心の恒星系力学
 - 星団と中間質量ブラックホール
 - ダークマターハローの構造
 - いわゆる矮小銀河問題

重力多体系ってどんなもの？

- 重力でものが集まっている
- 普通の星のように流体的な圧力とか縮退圧とかで支えられているわけではない

もの。大雑把には、星より大きくてガス雲でないもの全て。

そもそもどんなもの？(観測)

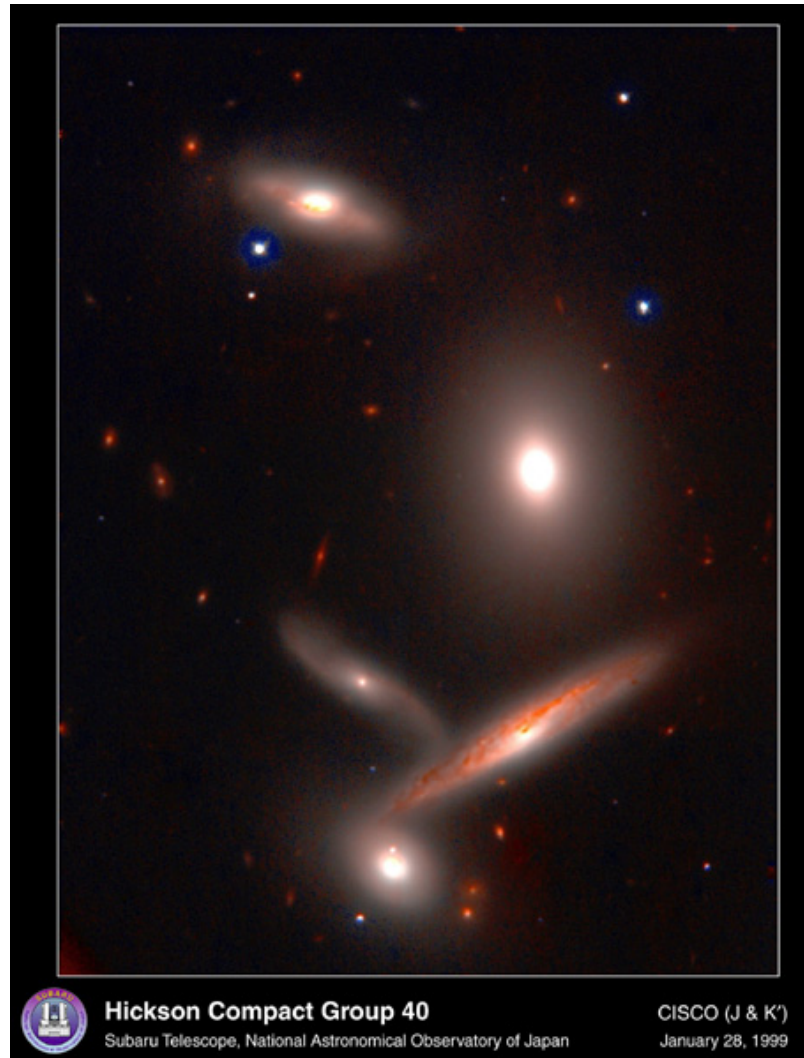
球状星団



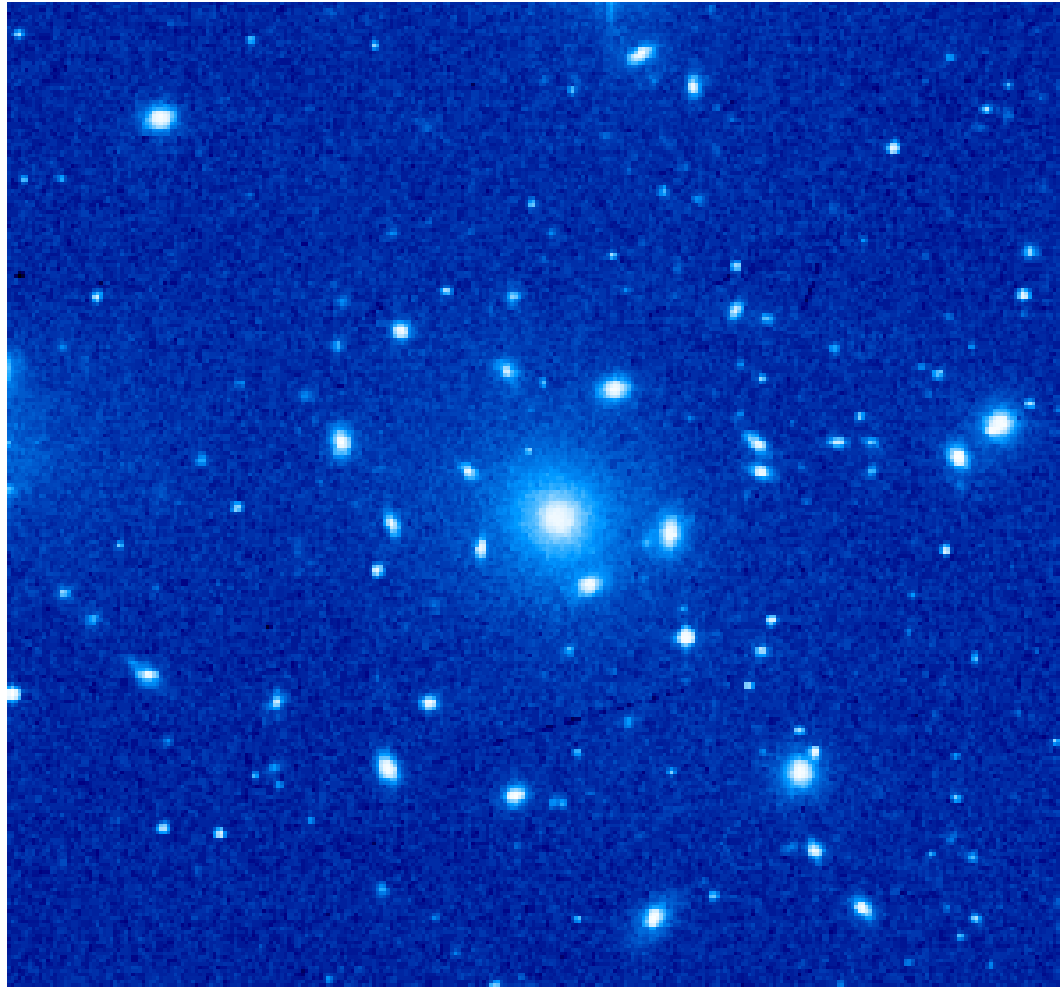
銀河



銀河群

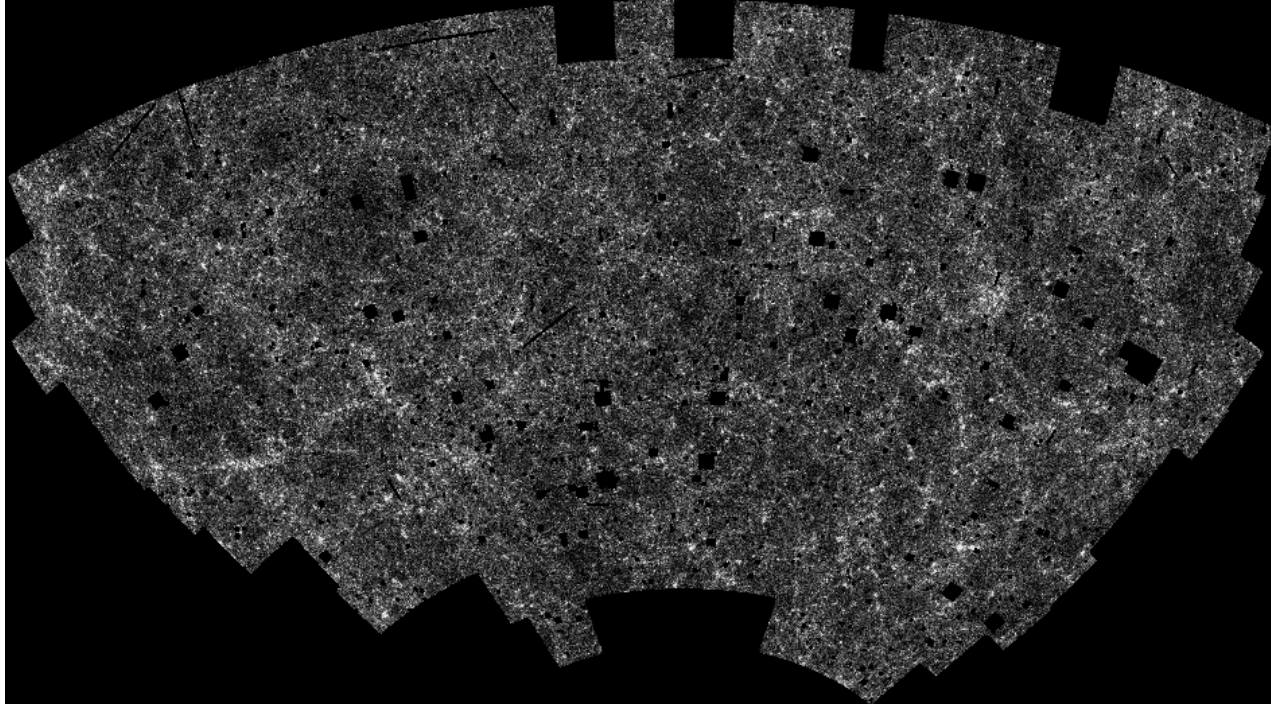


銀河団



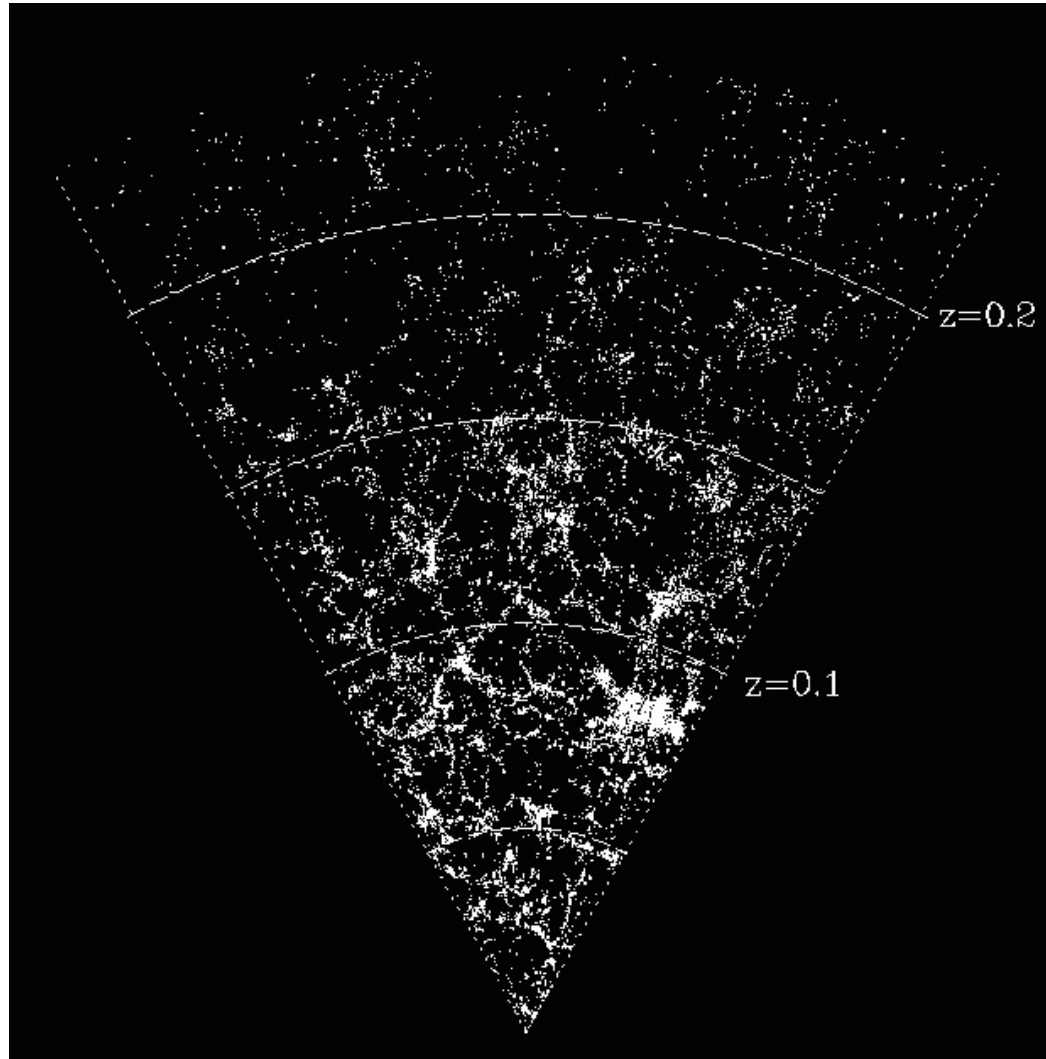
<http://antwarp.gsfc.nasa.gov/apod/ap950917.html>

大規模構造 (天球面)



http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~wjs/apm_grey.gif

大規模構造 (距離情報あり) — SDSS スライス



星団—昔の分類

- 散開星団 (銀河星団)

- プレアデス、ヒアデスとか
- 若い
- 星の数少ない ($< 10^4$)
- ゆるく重力的に束縛、あるいは束縛されていない

- 球状星団

- M5, ω Cen, 47 Tuc 等
- 星の数多い $\sim 10^6$
- 古い (宇宙年齢くらい)

我々の銀河系の中。あまり変でないところにあるもの

星団—最近の変化

「若い球状星団」あるいは「巨大な散開星団」というべきものが

- マゼラン雲
- 我々の銀河系の中心近く
- その他スターバースト銀河

で多数見つかった。

「星団」の分類は再定義が必要と思うが、あんまりまとまった提案はない。

まだ色々でてくるし、、、

Arches Cluster

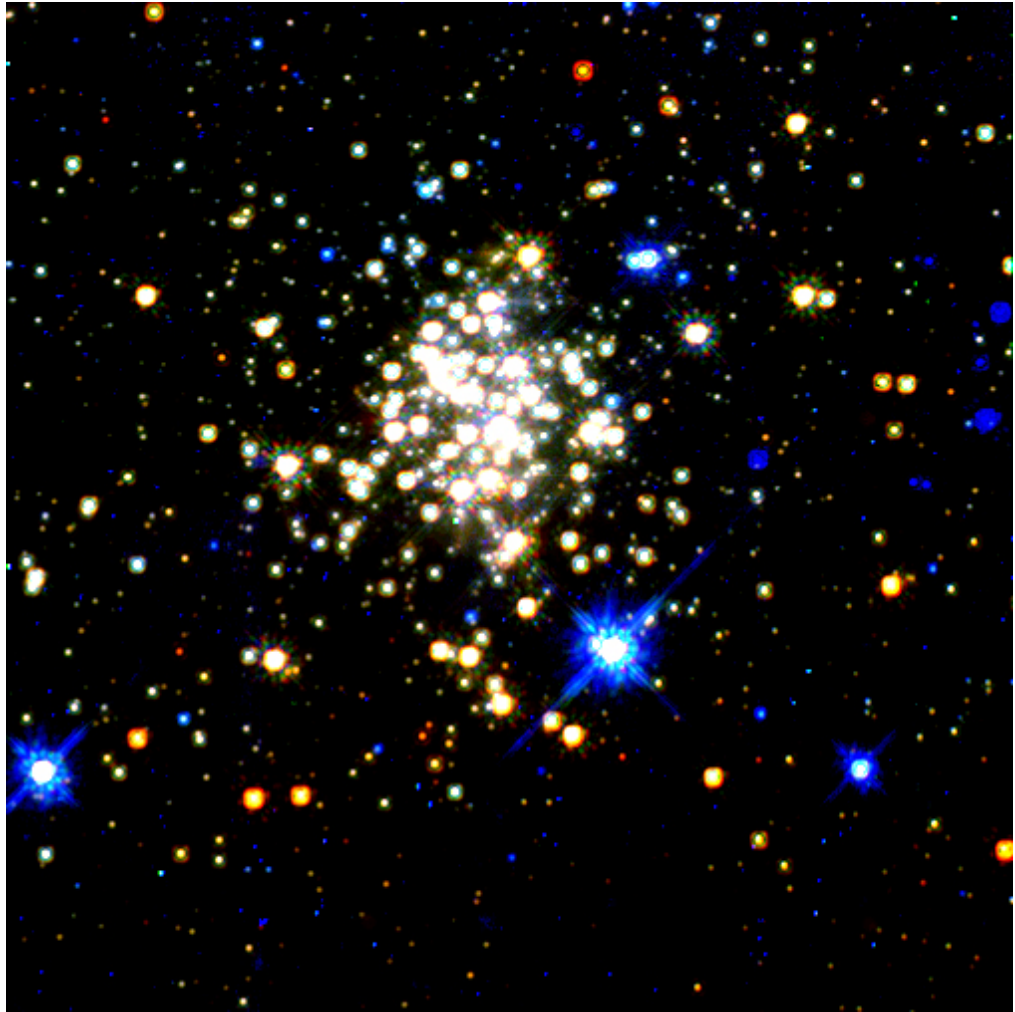
銀河中心から 30pc
くらい

質量 $> 10^4 M_{\odot}$

半径 1pc 以下

写真で明るいところ
は半径 4" くらい

発見: Nagata et al
(1995)



銀河中心

星団の(ちょっと普通でない)例としての。

最近10年くらいの観測

軌道周期 15年くらいで中心ブラックホール(と思われるもの)の周りを回る星なんてものが見つかってきた。

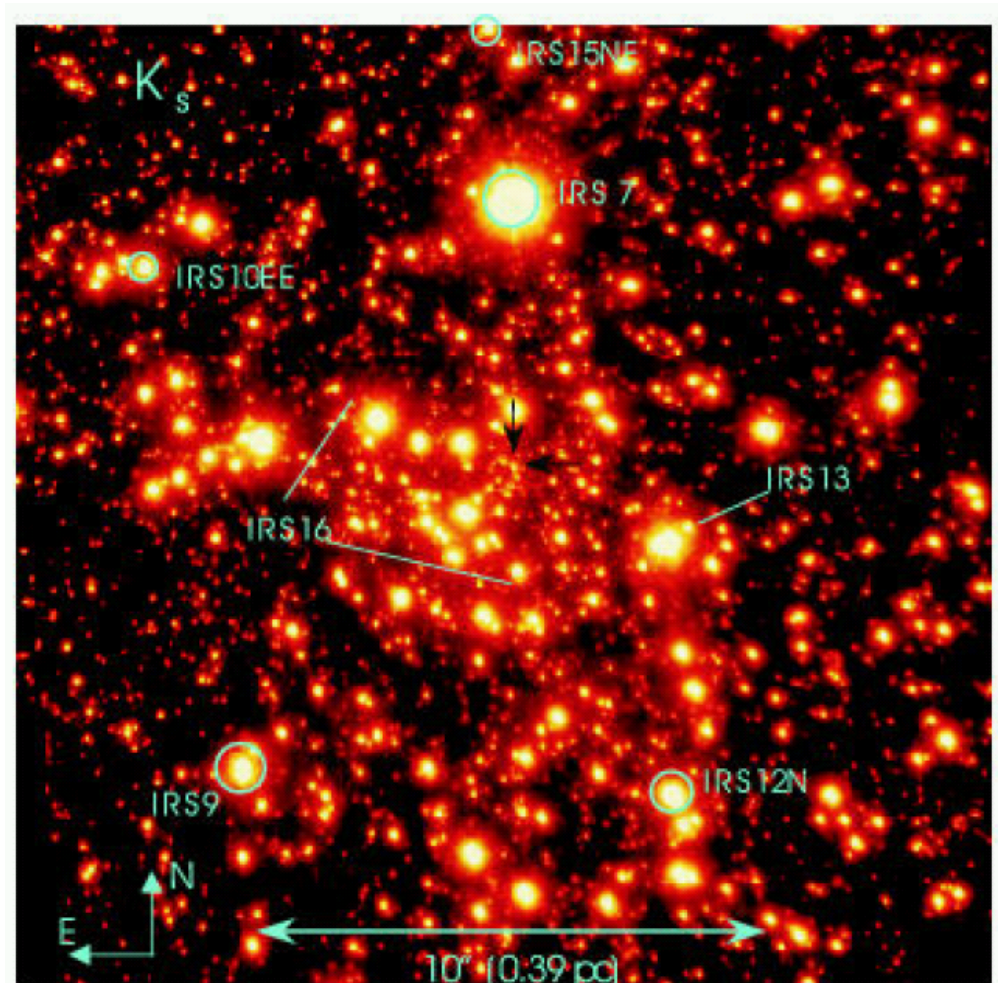
「中心星団」

Genzel et al 2003

K-band

shift-and-add im-
age

中心付近の黒い矢印
の先が Sgr A* (銀河
中心ブラックホール)



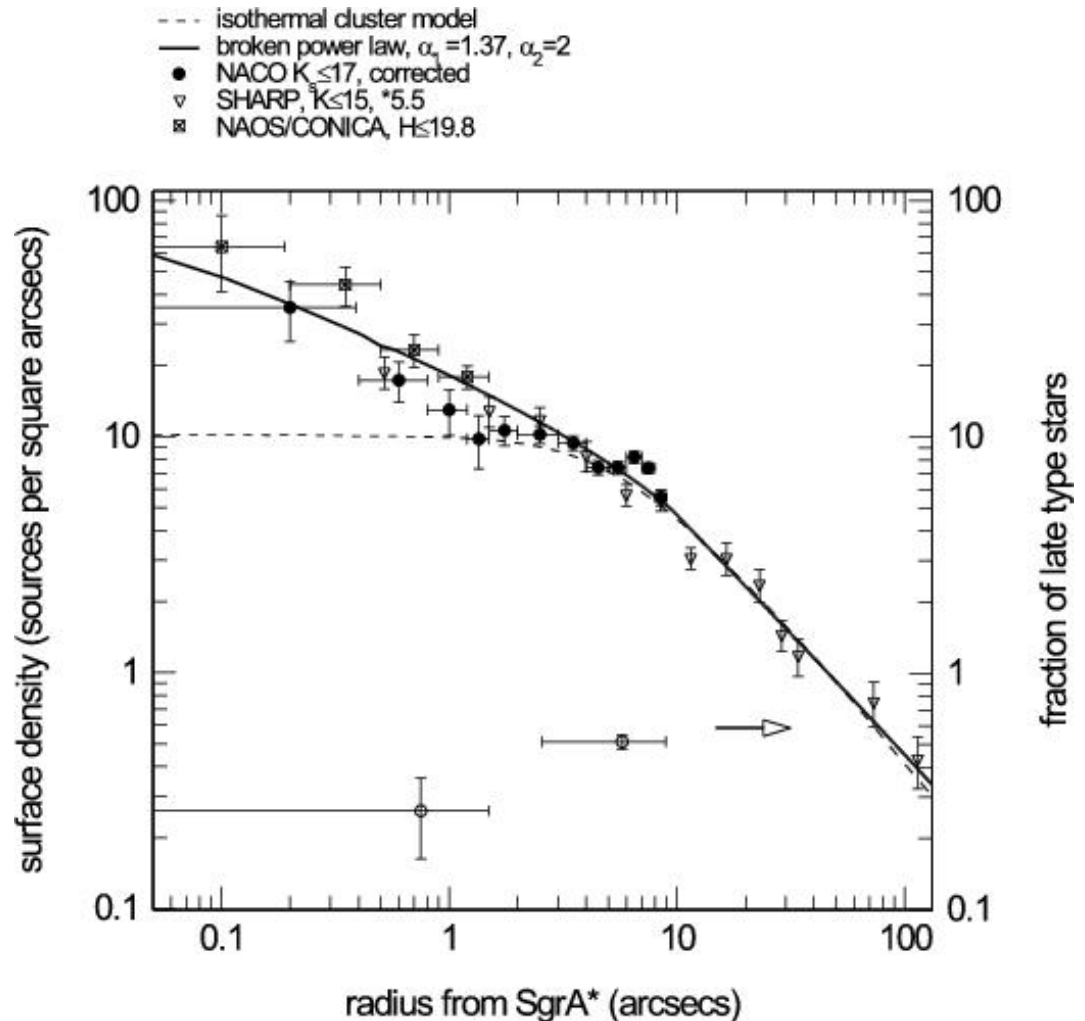
星の表面 (投影) 密度

Genzel et al 2003

10'' 以内の恒星の質量 $\sim 10^6 M_\odot$ (あんまり信用はできない)

若い星が結構多い。

0.5'' 以内でも若い星がある。(S1, S2, S0-16 ...)



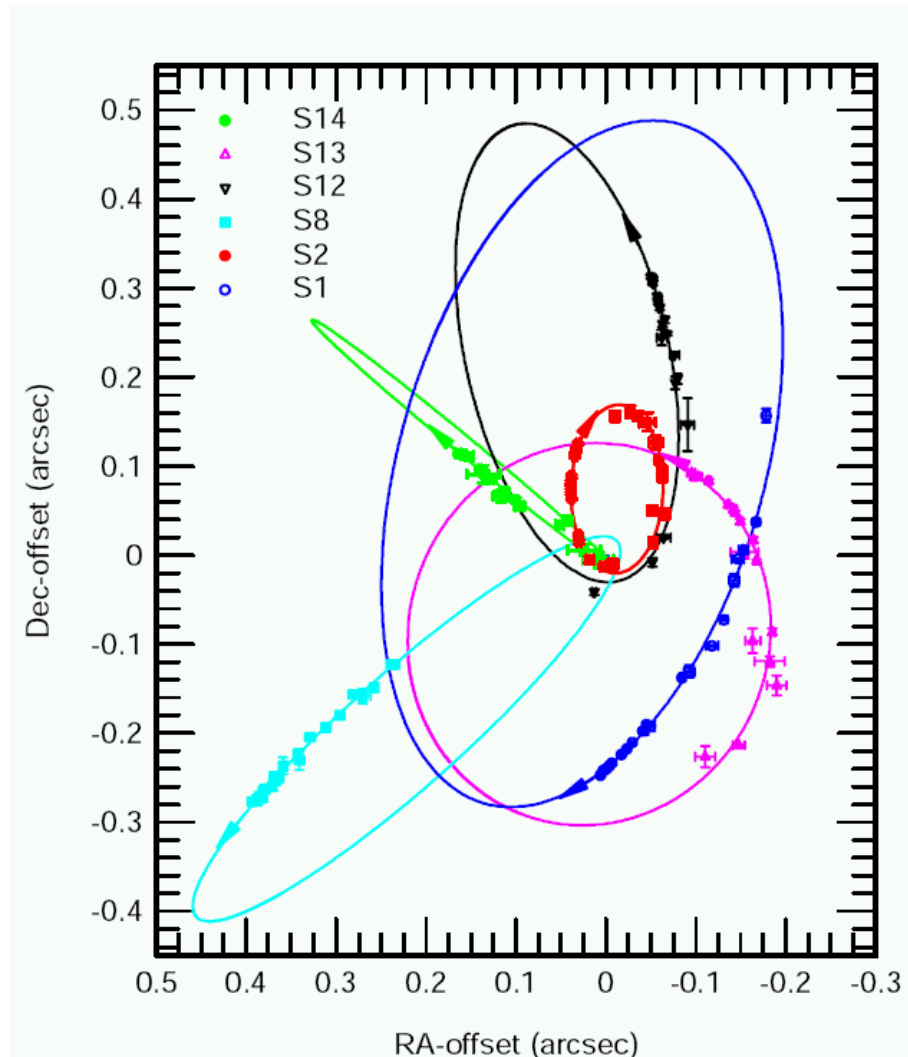
いくつかの中心付近の星の軌道

Eisenhauer et al
2005

最近 15 年くらいの
観測で、中心ブラック
ホールの周りを回る
星の軌道が見えた

星の分布は「等方的」
少なくとも円盤的と
はいいがたい

これらの星は結構若
い ($10M_{\odot}$ 以上)



銀河、銀河団

銀河、銀河団

省略

重力多体問題とは？

多体系の運動方程式：

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} f_{ij} \quad (1)$$

x_i と m_i は粒子 i の位置と質量、 f_{ij} は粒子 j が粒子 i に及ぼす力。

重力多体系なら f_{ij} はニュートン重力

$$f_{ij} = G m_i m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3}, \quad (2)$$

G は重力定数。

が、この式をじっとみてもほとんど何もわからない。

分からない理由

(特別な場合を除いては) 運動方程式が解析的に解けない。

解ける場合や、近似的に解ける場合は色々ある。

- ニュートン重力での2体問題 (ケプラー問題)
- 特殊な初期条件からの3体問題
- 粒子数無限大の極限での力学平衡解

しかし、解析的には解けなくたって、計算機を使えば数値解は求められる。だから、求めればそれでいいんじゃないか？

計算すればなんでもわかるか？

原理的には答は YES。

現実の問題としては NO。

- 計算機的能力
- 素過程の理解

例:太陽系の進化

太陽+9(8)惑星(+小惑星群+彗星+カイパーベルト天体+その他もろもろ、、、)

太陽が圧倒的に重いので自己重力系としては特殊。

- 0 次近似としては質点系
- 惑星の運動には小惑星以下は関係ない

それでいいといえるためには、(原理的には)他の全ての効果が無視できると「わかっている」必要がある。

- 太陽からの輻射圧
- 一般相対論的效果
- 潮汐力
- その他、、、
- 磁場

太陽系の進化(続き)

太陽系:太陽の回りを各惑星が回っている。

惑星同士の重力は太陽からののに比べて 3 桁程度小さい（木星の質量は太陽のほぼ 0.1%）。従って

ケプラー問題+摂動

とみなせる。で、各惑星はほぼ周期的な運動をする、つまりずっと同じような軌道を回る。

といっても、これは本当にそうか？（惑星の軌道は本当に安定か？）というのは現在でもまだ完全に解決されたとはいえない難しい大問題。

古典的な（19世紀くらいの）理解

「ラプラスが太陽系の安定性を証明した」

これは摂動展開したという話。

- ラプラスの頃にはまだ無限級数の収束条件はそもそも知られていなかった
- 摂動展開すればいいというものではないということをポアンカレが示した
- 海王星などの新しい惑星がみつかった
- 単純な力学系でも「カオス」になるということがわかってきた

近代的な（20世紀後半の）理解

20世紀後半には**太陽系が本当に安定かどうか？**というのは、

「なんだかよくわからない問題」

に戻ってしまった。

用語の「整理」

安定 これは実はあんまり明確に定義されていない。太陽系だと、要するに惑星がどっかにとんでいってしまうとか、2つがぶつかるとか太陽に落ちるとかそういった大きな変化はないという意味。

可積分 任意の初期条件で解析的な解が求まる。(多重) 周期的なので、フーリエ級数で書ける

用語の「整理」(続き)

カオス的 これも定義はかならずしもはっきりしない。可積分なものはカオス的ではないが、一般には可積分かどうかわかるとは限らないし、可積分でなくてもある初期条件の範囲で安定な解が求まるような力学系もある。

可積分な系の例

- 調和振動子
- ケプラー問題
- いくつかのコマ

多次元ではそんなに例が沢山あるわけではない (1次元ポテンシャルならなんでも可積分)

ややこしい例

可積分ではないけれど安定な解がある古くて新しい問題：重力
3体問題。

3個の質点がお互いの重力に引かれて運動する。

銀河、星団等のもっとも簡単なモデルともいえる。

(2体問題は可積分)

3 体問題の性質

一般の 3 体問題は可積分ではない： ポアンカレによって「証明された」

が、これはどんな初期条件でも安定ではないというわけではない。

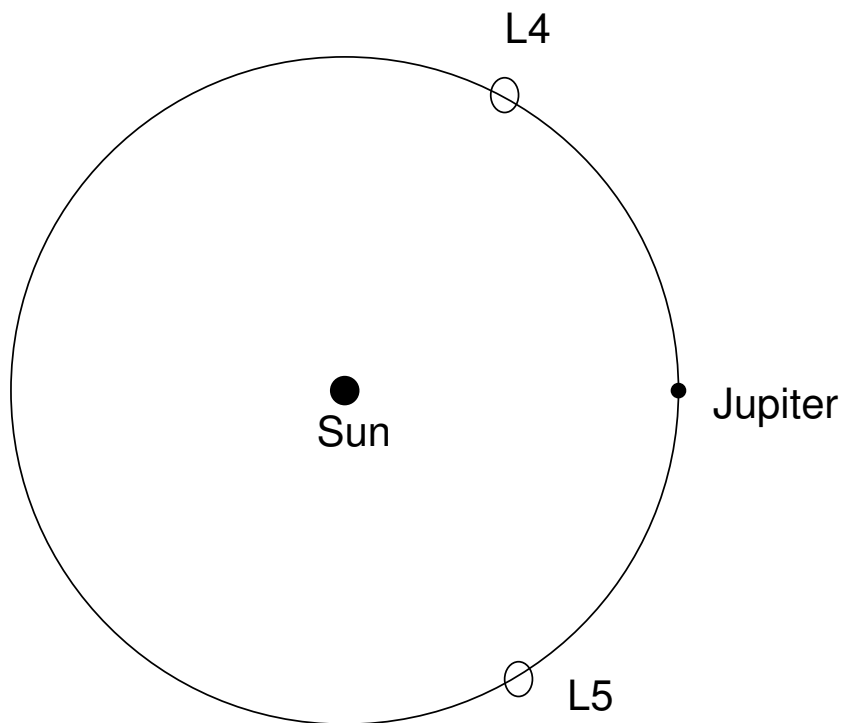
安定な解の例

ラグランジュ解（正3角形解）。

2,3 個めの質量が十分小さければ安定。

太陽・木星・トロヤ群の小惑星は実際にこのラグランジュ解を作っている。

（ラグランジュではなくてオイラーによって発見されたとか、...）



ちょっと余談

2006年夏の IAU General Assembly 総会で承認された惑星の定義

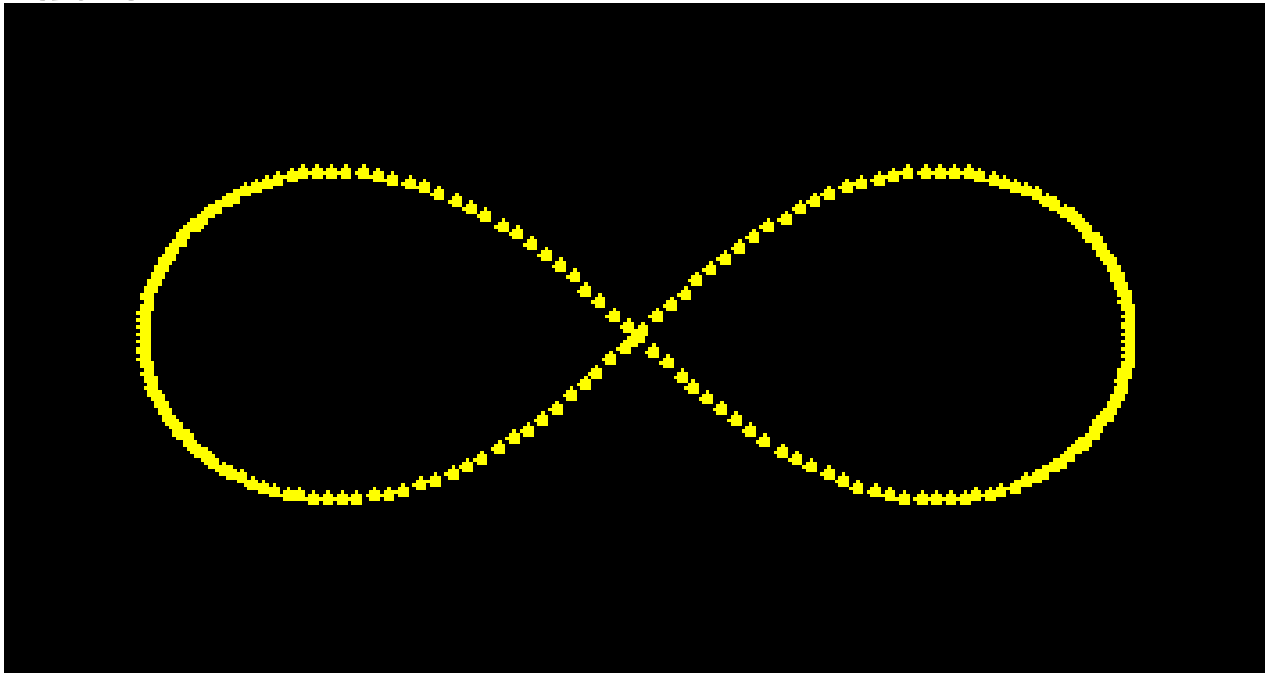
- 自己重力で丸い
- 自分の軌道の他の天体を掃きだした

あれ、トロヤ群は？

まあとにかく、トロヤ群とかは「掃きだした」と矛盾しないので木星が惑星でないなんてことはない、というのが(当然ですが) 公式見解。

ちょっと余談 II

10年くらい前に発見された新しい安定軌道 — Figure-8 Solution



アニメーション（東京大学総合文化研究科・船渡さん、Edinburgh 大学 Douglas Heggie 提供）

Figure-8 solution

- 3個の質量がほぼ等しい (0.005% 程度) の時にだけ安定 (らしい)
- 数値的に (計算機で) 周期軌道を見つける新しい方法が開発されて求まってきたもの。

太陽系の安定性について

結局、「計算機で長い間惑星の軌道を追いかけていって、どうなるか見る」のが唯一信用できる方法（信用できないとわかっていない方法）ということになった。

で、安定性はどうなったかということ

と、こういうような、いろいろな方法が出てきたこと、計算機が速くなったこともあって、

太陽系の惑星の軌道は「安定ではない」

ということが 1987 年には示された

ここでの「安定ではない」の意味は：

「非常に近い初期条件の太陽系を 2 個つくってそれぞれ別に計算すると、それぞれでの惑星の位置の差がどんどん大きくなっていく」ということ

不安定のタイムスケール

大きくなるタイムスケール：リアプノフ時間といわれるもの。
軌道間の距離が e 倍になる時間。

求まったリアプノフ時間： 2千万年

これ自体は 8.5 億年の計算をして求まったもの。

内惑星の計算で、こっちのリアプノフ時間はもっと短いとわかった。

太陽系はでは 45 億年間どうして存在を続けているのか？

さらに長い時間の計算（主に国立天文台の木下・中井・伊藤らによるもの）でわかったこと：

- リアプノフ時間は確かに 2 千万年 程度と短い
- だからといって惑星がどこかに飛んでいってしまうというようなことはおこらない（らしい）

つまり、軌道の安定性ということからみるとカオス的だが、だからといって全くなんでも起こるというわけではなくてある狭い範囲（どういう範囲かはよくわからない）に軌道が収まっている（らしい）

結局のところ

そういうわけで安定かどうかはある意味よくわかっていない。
天文学的な太陽系の安定性という観点からは、 100 億年計算
してそこにあればいいというところもある。
より理論的な問題としてはまだ未解決といえる。

太陽系が不安定ではないか？

系外惑星とか一杯見つかったことで、またちょっと理解が変わった

系外惑星には変なものが多い

- 木星くらいのものが水星軌道辺りを回っているもの
- 離心率がやたら大きいもの

そういうものが選択的に見つかる、という面もあるが、そういうものが結構ある、というのは確実
元々の惑星系が不安定になってそういうのが残ったのかも？

以下、太陽系の話はおいて銀河とか星団の話に移る。

例:銀河の進化

典型的な銀河: 1000 億個くらいの星、それと同程度の質量のガス、その数倍の質量の「ダークマター」からなる(ということになっている)

- 1000 億体問題は今の計算機では全く無理
- 1000 億体問題が解けても、それだけでは駄目
 - ガスから星ができる過程
 - 超新星爆発等で星がガスに戻る過程
 - ダークマターはどうするか

計算できないものをどうするか？

普通は「計算できない」

銀河の星の数: 10^{11}

多体計算で扱える粒子数: 多くて 10^7

分子動力学計算だともっと大変

現実の系: 10^{23} 個

計算できる: 例えば 10^5 程度 (目的による)

計算できないものをどうするか？ 続き

- 計算しなくてもわかることを考える
- 計算するにしても、少ない粒子数でとかもっと賢い方法でとか考える

いずれにしても、

- 「そこで起きていることはなにか」という「物理」の理解が重要。

とかいう抽象的な話を続けてもよくわからないので、以下、では重力多体系とはどんなものかという話。

重力多体系

- 基礎方程式
- 無衝突系としての扱い
- 熱力学的な進化

重力多体系の基礎方程式

もとの方程式自体はもちろん、各粒子の運動方程式

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} G m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3}, \quad (3)$$

数値計算にはもちろんこれを使うわけだが、理論的な扱いには不便

というわけで、しばらくは(1粒子)分布関数 $f(x, v, t)$ で話をする。

この時の基礎方程式:(無衝突) ボルツマン方程式

(無衝突) ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (4)$$

f : 6次元位相空間での分布関数 Φ : 重力ポテンシャル, 以下のポアソン方程式の解

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (5)$$

ここで、 G は重力定数であり、 ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int dv f, \quad (6)$$

なお、以下の議論では（当分） m のことは忘れて、その代わり f が個数密度ではなくて質量分布であるということにしておく。

ボルツマン方程式の導出

BBGKY とか使った導出はなんか見れば書いてあるし、良く知らないのでパス。

直観的な意味:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

要するに 6 次元位相空間でのラグランジュ微分 Df/Dt

で、これが $= 0$: 非圧縮での連続の式

なぜ非圧縮? という辺りから? かと。

以下でもうちょっとまともな導出

ボルツマン方程式の導出 続き 1

位相空間での座標を $w = (x, v, t)$ と書く

重力ポテンシャルを $\Phi = \Phi(x, t)$ とおく

位相空間の中での粒子の流れは

$$\dot{w} = (\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\nabla\Phi) \quad (7)$$

これは流れであるので、連続の方程式を満たす。つまり

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(f\dot{w}_i)}{\partial w_i} = 0, \quad (8)$$

一般の流れでは、第2項の微分はややこしいが、 w の性質から

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{w}_i}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i} \right) = \sum_{i=1}^3 -\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (9)$$

ボルツマン方程式の導出 続き 2

従って w の微分の項は全部なくなって、結局

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (10)$$

f : 6次元位相空間での分布関数

Φ : 重力ポテンシャル, 以下のポアソン方程式の解

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (11)$$

ここで、 G は重力定数であり、 ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int dv f, \quad (12)$$

力学平衡

「力学平衡」＝ 無衝突ボルツマン方程式とポアソン方程式を連立させたものの定常解

ある分布関数 f とポテンシャル Φ が力学平衡にある＝

- Φ は f から求めた空間での質量密度を右辺とするポアソン方程式の解
- 無衝突ボルツマン方程式にこの Φ を入れると f の時間微分が 0 になる

普通の流体なら静水圧平衡にあたる。

当然であるが熱平衡とは限らない

無衝突ボルツマン方程式と熱平衡

力学平衡ではないところからの無衝突ボルツマン方程式に従った時間発展を考える。

これは流れにそって f を保存するので、系のエントロピー ($f \log f$ の積分) は一定、つまり、少なくとも形式的にはエントロピーは保存される。

もちろん、「形式的には」と断わるのは、もうちょっとややこしい問題があるから。これはあとで。

「無衝突」ということ

普通の気体分子運動論の話: ボルツマン方程式の「衝突項」が問題。

分子同士の衝突で速度空間の中で広がる。速度分布関数はボルツマン分布になるとして流体の方程式がでてくる。

恒星系ではこれとは全然違い、局所的にボルツマン分布になるわけではない。

統計力学との関係

恒星系：粒子数の(そこそこ)大きい系

統計力学的に扱えないのか？という問題

普通の統計力学の割合根本的な前提:

アンサンブル平均で(熱平衡状態の)物事を表現できる

この前提はどういう時に成り立つか？というのが問題

アンサンブル平均

アンサンブル平均の形式的な意味: 系の「可能なあらゆる状態」全部での平均

この辺、良く考えると謎な問題が色々ある

1. 実際に可能な状態全部をとるのは無限に時間がかかるはずなのに、何故そんな平均をとるか？
2. そもそも、ある瞬間の状態は平均値でもなんでもないのに、何故その状態が平均値で表現できるのか？
3. 熱平衡でない状態はどうなってるのか？

この辺はあまりかかわりたくないですが、少しだけ、、

熱平衡とアンサンブル平均

例えば、断熱壁の箱の中の古典気体 (ミクロカノニカル・アンサンブル) の場合

- エルゴード性 (分布関数が可能な全ての状態をいつかはとる) があれば統計力学は正しい
- 実際には、可能な状態のうち「殆ど全て」で、温度とか圧力とかいったマクロな状態量を求めるとアンサンブル平均の値と一致
- そもそも、分布関数がボルツマン分布と一致

なのでアンサンブル平均を使っていい、というのが教科書的
回答

恒星系ではどうか？

そもそもアンサンブル平均が計算できない： ミクロカノニカルにしても位相空間が有限ではない

2方向の発散

- 星が無限遠方までいける： 空間で体積が閉じない
- 2つの星が近付くといくらでも速度が上がる： 速度空間でも体積が閉じない

どっちも面倒な話

恒星ではどうか

無限遠まで粒子が行けるのは同じ。恒星からの質量放出とか2つの粒子が近付いた時のエネルギーのあがりかたには(状態によっていくつかの)限界がある。

- 核融合: 鉄まで
- もっと圧力、密度上げると: 縮退圧
- ブラックホール、、、

但し:「局所的には」熱平衡と置いていい(ことが多い)

局所熱平衡の概念

「普通の」非平衡状態：局所平衡で扱える

これは、

非平衡＝ 場所によって温度が違うこと

と思うのとほぼ同じ

それぞれの場所で「温度」を考えることができないとこう思えない。

局所熱平衡と平均自由行程

普通の気体で局所熱平衡を考えていいスケール

- 系のサイズより十分小さく
- 平均分子間距離 (平均自由行程) より十分大きい

サイズ。その中で、気体分子は衝突を繰り返して、(エルゴード的までとはいかないけれど) ほぼ熱平衡分布になる。

恒星系での平均自由行程は？

これはつまり、衝突項とは何か？ということ。

無衝突：衝突項がない

つまり：平均自由行程は無限大、ということ。

こうなると統計力学ではどうにでもならないのはまあ当然。

恒星系における衝突項の起源

これは結構微妙な問題。

粒子数が無限に大きいなら衝突項はない = 有限ならなにかある。

その何かはどういうものか？

- 粒子同士の近接遭遇による重力散乱
- 粒子数が有限であることによる場のゆらぎ

区別はあるか？

近接遭遇

系の半径が1、質量も1、重力定数も1、となるような単位系で考えると、粒子の速度は1程度 (後でてくるビリアル定理)。

粒子の速度が大きく変わるような近接散乱: 粒子数が N として、距離が $1/N$ 程度まで近づく (ポテンシャルエネルギーが運動エネルギーの程度になる) 必要あり。

一回起こるまでに時間が N くらいかかる。

場のゆらぎ

N 個の粒子が勝手に動くので、ある点での重力ポテンシャルは $1/\sqrt{N}$ 程度揺らぐはず。

ゆらぎの時間スケールは典型的な粒子の軌道周期程度。

1つの粒子のエネルギーも単位時間に $1/\sqrt{N}$ 程度揺らぐはず。

やはり N 程度の時間がたつと大きくエネルギーが変わる。

両者の関係

どちらも同じくらい効く。実は中間的な距離スケール、時間スケールも効く。

精密な議論は後ですが、粒子の軌道が変化する時間スケールは $N / \log N$ 程度になる。

これは「熱力学的」な進化をうながす。つまり、エントロピーを生成して系を熱平衡に向かわせる

但し、いつも熱平衡があるわけではない。

恒星系にとって熱平衡とは何か

というか、非平衡から熱平衡に向かうような進化はあるか？

これが、講義の後半の、「衝突系の進化」の主な問題。

そこで使えるような概念整理をすることが、無衝突系を扱うことの一つの目的

力学平衡な分布

というわけで、力学平衡な分布についてもう少し考えてみる。

- 多少人工的でもそういうものを作れないか？
- 力学平衡ということだけからいえる一般的で有用な性質はないか？

このためにちょっと準備: Jeans の定理、運動の積分

運動の積分

ポテンシャル Φ のもとで、ある x, v の関数 I が運動の積分であるとは、その上での粒子の運動に対して

$$\frac{d}{dt}I(x, v) = 0, \quad (13)$$

がなり立つこと。

つまり、実際にすべての粒子の軌道について、その上でその量
が変化しないということ

ちょっと変形すれば

$$v \cdot \nabla I - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial I}{\partial v} = 0 \quad (14)$$

無衝突ボルツマン方程式の定常解と同じ式

細かい話

「運動の積分」というときの流儀は2通り

- 運動の保存量ならなんでも
- 位相空間の座標だけの関数でかつ保存量なもの

違い: たとえば1次元調和振動子の「初期の位相」は保存量だが第二の定義では運動の積分ではない。以下では第二の定義を使う。

運動の積分の例:

エネルギー $\frac{1}{2}v^2 + \Phi$ や、ポテンシャルが球対称 (r だけの関数) の場合の角運動量ベクトル $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ は運動の積分である。

ジーンズの定理

運動の積分について以下の「ジーンズの定理」がなり立つ。

ジーンズの定理: 与えられたポテンシャル Φ の下での無衝突ボルツマン方程式の任意の定常解は、運動の積分を通してのみ位相空間座標に依存する。逆に、任意の運動の積分の関数は定常解を与える。

つまり

分布関数 f が定常である $\leftrightarrow$ 運動の積分 $I_1, I_2, \dots, I_m$ があって $f = f(I_1, I_2, \dots, I_m)$ の形で書ける

これはとても基本的で重要な定理

証明

「定常ならば運動の積分で書ける」というほう:これは、 f 自体が運動の積分の定義を満たしているので、OK。

逆(運動の積分なら定常解)のほうは、実際に f の全微分を I_k で書き下せば、それぞれが 0 になるということからいえる。

これはとても強力な定理だが、一般の場合にはそれほど役に立つわけではない。

一般のポテンシャルでは運動の積分というのは 5 個まで存在しえるが、その全部は簡単にはきまらないから。

ただし、球対称とか軸対称とか条件をつけると、割合簡単にいろいろちゃんと決まるようになる。以下、まず球対称の場合を考える。

球対称の場合

球対称の場合、運動の積分はエネルギーと角運動量の3成分で4つ。

一般にはもう一つあるが、これは特別な場合を除いてあまり意味がないので、定常な分布関数はエネルギーと角運動量だけで書けると思っていい。

意味がある特別な場合: ケプラー軌道のような、軌道が閉じる場合。

この時には、エネルギーと角運動量の他に、軌道全体の向きを表す量（近点経度、ラプラス・ルンゲ・レンツ・ベクトル）が保存する。これはちゃんと保存量になっている。

普通の場合は

一般には軌道が閉じない。

近点経度に対応するような保存量は実は存在している

でも、ある軌道はエネルギーと角運動量で決まる部分空間を覆ってしまう

(数学的には、もちろんすべての点を覆えるのではなく、任意の点について、いくらでも近くにいけるというだけだが)。

その保存量に分布関数が依存すると、連続性とか微分可能性とかに困難を生じる。あんまり物理的ではない。

$$f(E, J)$$

球対称だと f は E と J による

球対称なので f は J の方向に依存しない $\rightarrow$ 絶対値だけに依存する

球対称の分布関数は一般に $f(E, J)$ と書ける。

我々が扱いたいのは自己重力系なので、実際にポアソン方程式を球対称の場合に書き下してみると

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \int f \left(\frac{1}{2} v^2 + \Phi, |r \times v| \right) dv, \quad (15)$$

てな感じになる。

但し、例えば輝度分布から $f(E, J)$ を決めるのは情報不足。

$f(E)$ の場合

さらに単純化してとりあえず J にもよらない場合というのを考えてみる。

この場合空間上の各点で速度分散が等方的
一般にある方向の速度分散というのは

$$\langle v_e^2 \rangle = \frac{1}{\rho} \int v_e^2 f(v^2 + \Phi) dv \quad (16)$$

となるが、 f が v の絶対値にしかよらないので、 v_e の方向にこの積分はよらない。まあ、速度分散がとかいうより、速度分布自体が等方的なのだから当然ではある。

$f(E)$ の場合 (続き)

以下、扱いやすくするために変数を取り直す。

$$\Psi = -\Phi + \Phi_0, \quad \mathcal{E} = -E + \Phi_0 = \Psi - v^2/2 \quad (17)$$

ここで Φ_0 は定数で、普通は $\mathcal{E} > 0$ で $f > 0$, $\mathcal{E} \leq 0$ で $f = 0$ となるようにとる。

これらを使って、さらに v の角度方向に渡って積分すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) &= -16\pi^2 G \int_0^{\sqrt{2\Psi}} f\left(\Psi - \frac{1}{2}v^2\right) v^2 dv \\ &= -16\pi^2 G \int_0^{\Psi} f(\mathcal{E}) \sqrt{2(\Psi - \mathcal{E})} d\mathcal{E}. \end{aligned} \quad (18)$$

これで、一般に f を与えて Ψ を求めるとか、あるいはその逆とかが出来る。

球対称な分布関数の例

ここであげるのはあくまでも例であるが、さまざまな理由からその性質がよく調べられているものである。

- ポリトロープ
- Hernquist モデルとその仲間
- 等温解
- キングモデル

ポリトロープとプラマーモデル

ある意味でもっとも簡単な分布関数の例は、 $\mathcal{E}$ の冪乗（パワー）で書けるものである。例えば

$$f(\mathcal{E}) = \begin{cases} F \mathcal{E}^{n-3/2} & (\mathcal{E} > 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

これから、まず密度を Ψ の関数として求められる。答えは

$$\rho = c_n \Psi^n \quad (\Psi > 0) \quad (20)$$

となる。ただし、 c_n が有限になるためには $n > 1/2$ でないといけない。

上を使ってポアソン方程式から ρ を消去すると

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + 4\pi G c_n \Psi^n = 0 \quad (21)$$

Lane-Emden 方程式

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + 4\pi G c_n \Psi^n = 0 \quad (22)$$

から、変数を適当にスケールリングして

$$\frac{1}{s^2} \frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{d\psi}{ds} \right) + \psi^n = 0 \quad (23)$$

としたものを Lane-Emden 方程式と呼ぶ。

実際には、上の Lane-Emden 方程式を解かないとポテンシャルや密度がどうなっているかはよくわからない。

プラマーモデル

一般の n では Lane-Emden 方程式には初等的な解はないが、 $n = 5$ の場合には解があることが古くから知られている。これは

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}s^2}} \quad (24)$$

の形をしている。密度は $c_5 \phi^5$ で与えられる。

密度が $r = 0$ で有限で、 $r \rightarrow \infty$ で $1/r^3$ より速く落ちるので、質量は有限。

天文学的になにか素晴らしいものではないが、球状星団のうち中心密度が低いものには似ていなくもない。とりあえず、これの意味は、解析関数で簡単に書ける自己重力系の self-consistent なモデルであるということである。

ポリトロープガス球との関係

Lane-Emden 方程式はポリトロープな状態方程式

$$P \propto \rho^{1+1/n} \quad (25)$$

の自己重力ガス球の静水圧平衡の式と同じ。

従って、密度構造は同じ。でも、分布関数や局所的な速度分布は一般には同じではない。

ガス：(普通は)局所的にボルツマン分布

重力多体系：エネルギーのべき乗

Hernquist Model

プラマーモデルはその存在が前世紀から知られているが、こちらは論文が発表されたのが 1990 年という割合新しいモデルである (Hernquist, L., 1990, ApJ 356, 359)。

ポテンシャルを

$$\Phi = -\frac{1}{r + a} \quad (26)$$

で与える。密度分布は

$$\rho = C \frac{a}{r(r + a)^3} \quad (27)$$

で書ける。分布関数は求まっているが、めんどくさいのでここには書かない。

Hernquist Model と $r^{1/4}$ 則

Hernquist Model には、「 $r^{1/4}$ 則をかなり良く再現する」という (天文学的には) 著しい特徴がある。

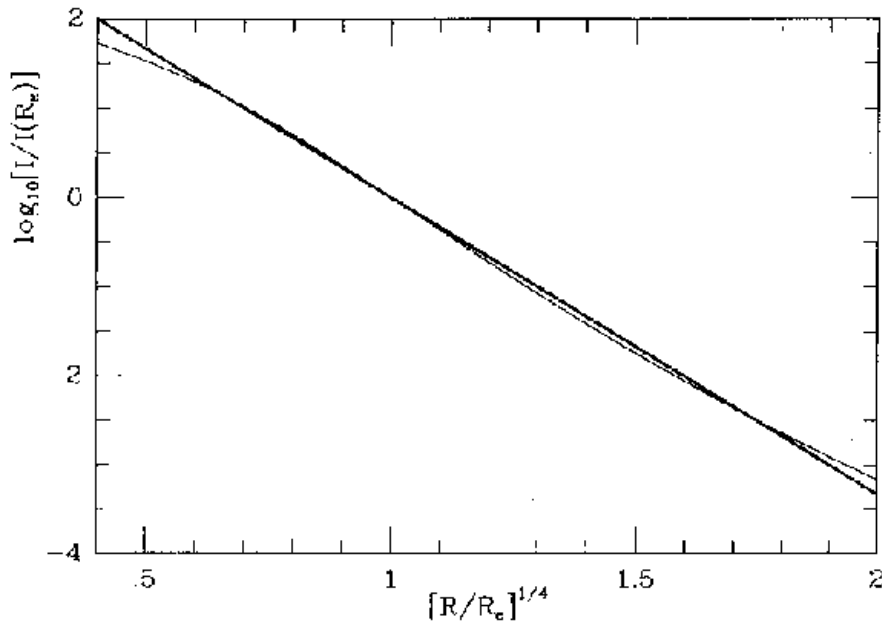


FIG. 4. Surface brightness profiles for the $R^{1/4}$ law (thick curve) and the present model (thin curve) as a function of $(R/R_e)^{1/4}$. Surface brightness is normalized to its value at R_e where R_e refers separately to the effective radii of the two models.

$r^{1/4}$ 則についてはまた後で。

要するに、観測される楕円銀河の表面輝度の対数 (等級) が、半径の $1/4$ 乗に対して直線にのって見えるというものである。

Hernquist モデルの仲間

Hernquist モデル: 内側でスロープ -1 、外側で -4 。

- 2つのスロープ
- その切り替わる速さ

を変えると色々モデルができる。

外側 -4 のもの (有限質量)

Jaffe モデル、Dehnen モデル、Tremaine の η モデル

外側 -3 のもの (有限質量でない)

Navarro-Frenk-White (NFW) プロファイル、Moore プロファイル

Dehnen Model

密度分布

$$\rho = C \frac{a}{r^\gamma (r + a)^{3-\gamma}} \quad (28)$$

$\gamma = 1$: Hernquist model

$\gamma = 2$: Jaffe model

NFW プロファイル、Moore プロファイル

NFW (NFW1996)

$$\rho = C \frac{a}{r(r + a)^2} \quad (29)$$

Moore (Moore et al 1999)

$$\rho = C \frac{a}{r^{1.5}(r^{1.5} + a^{1.5})} \quad (30)$$

どちらも、ダークマターの構造形成シミュレーションの結果を
フィットするモデル。詳しくは後で。

等温モデル

熱平衡状態について理解しておくことは結構大事である。

熱平衡状態では（古典統計なので）分布関数はマックスウェル–ボルツマン分布、すなわち

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathcal{E}/\sigma^2} = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) \quad (31)$$

で与えられなければならない。

等温モデル(続き)

まず、例によって分布関数を速度空間で積分して密度をポテンシャルの関数として表す。この時に誤差関数についての

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = 1 \quad (32)$$

を使うと、

$$\rho = \rho_1 e^{\Psi/\sigma^2} \quad (33)$$

ポアソン方程式にこれを入れると

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (34)$$

従って、

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \log \rho}{dr} \right) = -4\pi G \sigma^2 \rho \quad (35)$$

等温モデル(続き 2)

まず、一つ特別な解があるということを指摘しておく

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \quad (36)$$

は、解の一つとなっている。(singular isothermal sphere)

これは self consistent ではない: 質量が $M_r \propto r$ となって発散

渦巻銀河の、「回転速度が中心からの距離に（あまり）依存しない」（いわゆる flat rotation curve）という性質: $\rho \sim 1/r^2$ のダークハローを示唆(?)

特別ではない解は、中心密度を有限にして中心から外側に向かって解いていけばいい。この時でも、 $r \rightarrow \infty$ の極限では singular isothermal に近づく。

流体との関係

等温モデルは、エントロピー極大であり、分布関数がボルツマン分布になっているという特別な性質がある。このため、等温ガス球と実は同じ構造をとる。以下、ガス球について方程式を導いておく。静水圧平衡の式は

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2} \quad (37)$$

である。状態方程式に等温の

$$P = \frac{k_B T}{m} \rho \quad (38)$$

を使って P を消して、さらに M_r を微分してみれば、係数を別にして

$$C \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \log \rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho r^2 \quad (39)$$

ポリトロープの場合再考

等温モデルでは stellar system とガスで同じ方程式になっている。

ポリトロープでも、ポリトロピックな状態方程式を持つガス球の密度分布と stellar system のそれとは一致する。

が、等温モデルの場合とは実は本質的な違いがある。等温モデルの場合は、分布関数そのものが一致する（ボルツマン分布であり、局所的にも大局的にもエントロピー最大）が、一般のポリトロープではそんなことはない（そもそもガス球ではジーンズの定理が成り立たないし、局所的には普通ボルツマン分布であるから）。

King Model

等温モデルは、すでに述べたように熱平衡（エントロピーの変分が 0 ）という重要な意味を持つ定常解である。

ちょっと問題なこと:質量が無限大であり現実に存在しない
なにか適当な仮定を置くことで、「おおむね等温モデルであり、
なおかつ有限の大きさをもつ」というものを考えることはできないだろうか？

発散する理由

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathcal{E}/\sigma^2} = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) \quad (40)$$

上の分布関数で、質量が発散する理由：な理由は、分布関数がエネルギー無限大 ($\mathcal{E} \rightarrow -\infty$) まで0にならないこと

有限の質量のものが自己重力でまとまっているためには、すべての粒子のエネルギーが負でないといけけないので、これでは自己重力系が表現出来ないのはある意味では当然

それならば、ある有限のエネルギー以上のものはないことにしてしまえばいい。

有限で切る方法

とりあえず Lowered Maxwellian と呼ばれる以下のようなものを考える

$$f(\mathcal{E}) = \begin{cases} \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} (e^{\mathcal{E}/\sigma^2} - 1) & (\mathcal{E} > 0) \\ 0 & (\mathcal{E} \leq 0) \end{cases} \quad (41)$$

これは $\mathcal{E} = 0$ で $f = 0$ となるように、1 を引いたというだけである。これしか方法がないというわけではないが、これは扱いやすいこともあってもっともよく使われている。

ちょっと計算

例によって、まず速度空間で積分すれば

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{4\pi\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \int_0^{\sqrt{2\Psi}} \left[\exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) - 1 \right] v^2 dv \\ &= \rho_1 \left[e^{\Psi/\sigma^2} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\Psi}{\sigma^2}}\right) - \sqrt{\frac{4\Psi}{\pi\sigma^2}} \left(1 + \frac{2\Psi}{3\sigma^2}\right) \right] \quad (42)\end{aligned}$$

ここで erf は誤差関数で、積分が有限区間であるために出てくる。最後の項は1引いている分の寄与である。ちなみに

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (43)$$

これでポテンシャルの関数として密度が求まったので、あとはポアソン方程式に入れて数値的に解くだけである。

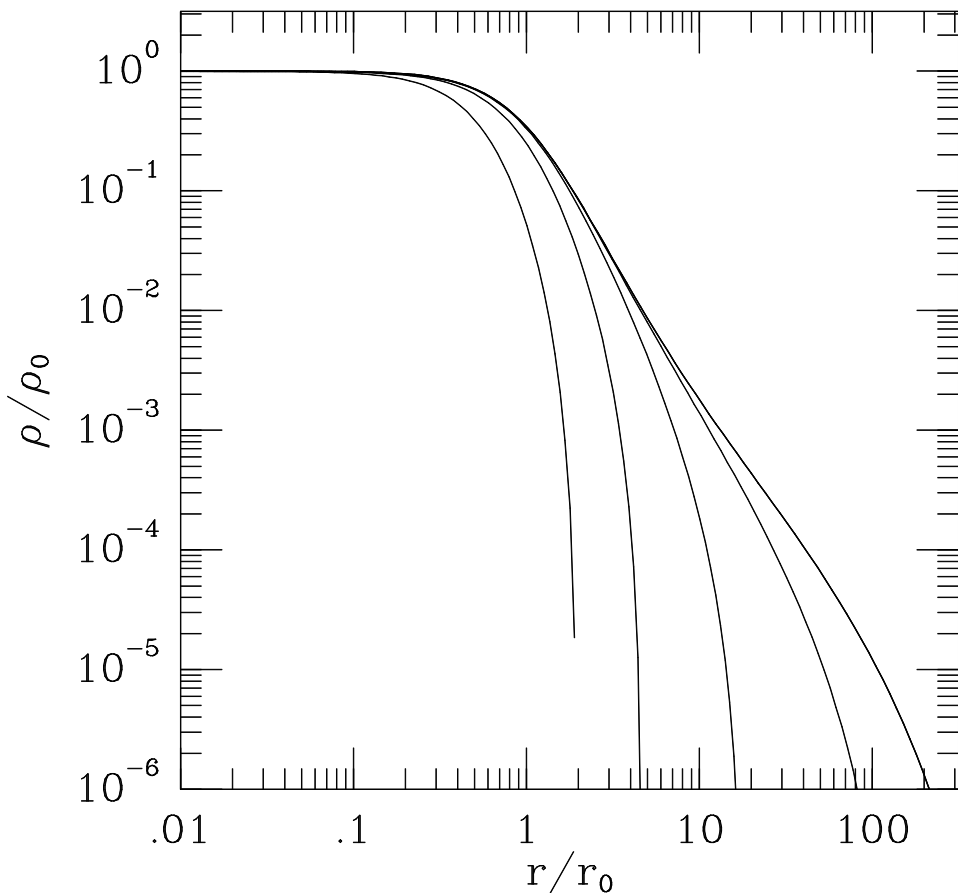
境界条件は？

半径方向の分布は、中心から無限遠まで与えられる。

実は外側の境界をどうとるべきかはちょっと自明ではないので、とりあえず中心から初期値問題として解くことを考える。

初期条件としては、まず $d\Psi/dr = 0$ とする、すなわち、中心密度が有限の解を考える。 Ψ_0 は任意に選べるので、これの値によっていろいろな解がでてくる。

数値解



これは実際に数値的に解いてみたものの例である。速く落ちるものから、 Ψ_0 が 1, 3, 6, 9, 12 と変えてみてある。

なお、横軸のスケールの r_0 は、

$$r_0 = \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_0}} \quad (44)$$

として無次元化するのに使っている。

数値解 (続き)

有限の半径 r_t で ρ は 0 になる。

(解いていったときに Ψ が 0 になってしまうため)

この半径: King model の tidal radius 潮汐半径

King Model は、球状星団のプロファイルのモデルとして非常によく使われている。なお、 $c = \log(r_t/r_0)$ のことを concentration parameter といって、観測データにキングモデルを合わせた論文では普通これがパラメータになる。理論計算では Ψ_0 が使われるので、ちょっとややこしいことが多い。

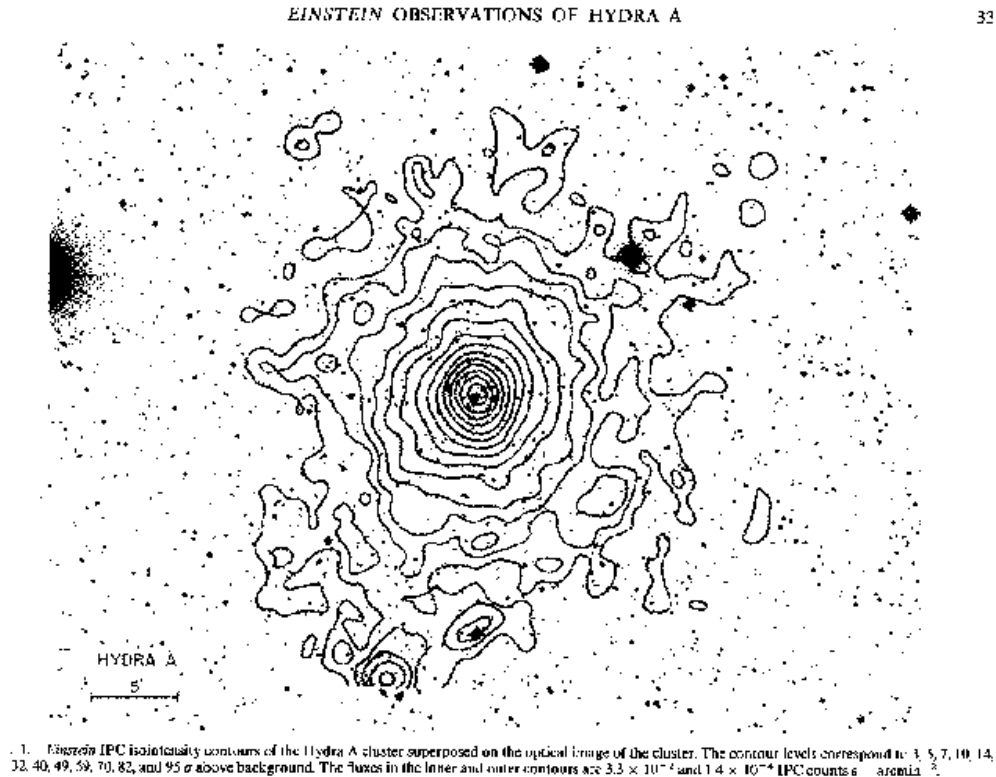
多成分系の例

実際の天体、例えば銀河団：ダークマター、ホットガス、銀河とかからなる多成分系

成分毎に違う分布であっても不思議ではない、というより同じだったら不思議。

例えば球対称なダークマターの中でのガスの分布を考える。

X線ガスの分布



Einstein IPC による Hydra A 銀河団に (David et al. ApJ 1990, 356, 32) の像。

モデル化

Chandra だと無限に細かい構造が見えてこんな簡単にはすまないが、まあ、簡単にはこんなふうに丸いということに。

以下、

- ほぼ等温である
- ほぼ静水圧平衡にある

ということにする。これもまあ細かく見れば駄目だけど。

もっと単純化

さらに、

- ガスの自己重力は無視できる

ということにする。これは、銀河団なんかだとちょっと怪しいが、まあ全然だめというほど悪くはない。さらに、

- 恒星系は等温分布である

とする。だんだん、ほんとかなあという気がしてくることと思うが、まあ、研究の現場というのはそういうものです。

これぐらいたくさん仮定すると、美しい理論を構築できることになる。

ガスの分布

まず、ガスの速度分散と恒星系の速度分散が等しい場合というのを考えてみる。

ガスの密度 ρ_g が従う方程式は、星の密度を ρ_s として

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \log \rho_g}{dr} \right) = - \frac{4\pi G m}{k_B T} \rho_s r^2 \quad (45)$$

ρ_s 自体がこの方程式の解

これは ρ_g の対数についての微分方程式なので、

$$\rho_g = C \rho_s \quad (46)$$

というのが解になっている。つまり、どこでもガスと星の密度比が等しいというのが平衡状態になる。まあ、当たり前ですね。

ガスの分布 温度（速度分散）が違う場合

温度（速度分散）が違う場合を考える。

ガスの温度 T_g と、恒星系に対応する「温度」 T_s の比を $T_g/T_s = 1/\beta$ と置くと、ガスの密度が従う方程式は、

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \log \rho_g}{dr} \right) = \beta [\text{式 (45) の右辺}] \quad (47)$$

この解は

$$\rho_g = C \rho_s^\beta \quad (48)$$

で与えられる。

対数でグラフに書いて縦に β 倍したものが解。

温度が高ければ等温解に比べて傾きが緩くなり、低ければより急になる。

恒星系の場合

質量が違う星が色々あって近似的に熱平衡な恒星系を考えると、上のガスの場合と同じように速度分散によって密度の傾きが違う。

- 重い星：速度分散小さい、中心に集まる
- 軽い星：速度分散大きい、外側に広がる

β モデル

と、ここまではちゃんと正しい話をしてきたが、実際に観測結果の解釈に使う時にはさらに大胆な近似がなされる。以下、Sarazin の X-ray emissions from clusters of galaxies 5.5 節に従っていわゆる β モデルについて説明し、その問題点について検討する。

式 (48) は使い回しがよくない。

ρ_s のほうがそもそも数値的にしか求まっていない。

ρ_s をなにか解析関数で置き換えたい。

以下の質量分布は「 $r < 2.5r_c$ 程度ならば」等温解の非常によい近似になっている。(遠くにいくとどんどんずれるが)

$$\rho = \rho_0 [1 + (r/r_c)^2]^{-3/2} \quad (49)$$

β モデル 続き 1

$$\rho = \rho_0 [1 + (r/r_c)^2]^{-3/2} \quad (50)$$

を恒星系の分布と思えば、ガスの分布は

$$\rho = \rho_0 [1 + (r/r_c)^2]^{-3\beta/2} \quad (51)$$

と解析関数で書けることになって大変結構である。

X 線で観測する $\rightarrow$ 観測されるのは X 線の強度 = 密度の 2 乗を視線方向で積分したもの

$$I(r) = 2 \int_0^\infty \rho(\sqrt{r^2 + z^2})^2 dz \quad (52)$$

となるわけだが、これは積分できて、

$$I(r) = C [1 + (r/r_c)^2]^{-3\beta+1/2} \quad (53)$$

β モデル による観測のフィッティング

観測をフィットすると：左はうまくいく例である (Jones and Forman 1984)。右は先ほど見せた Hydra A

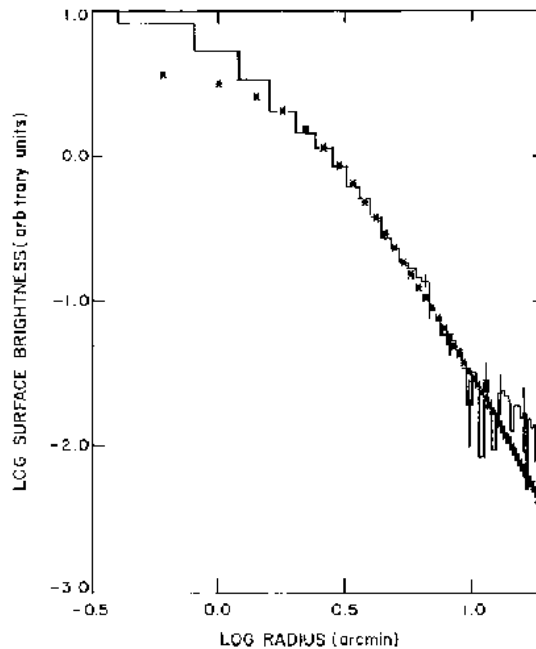
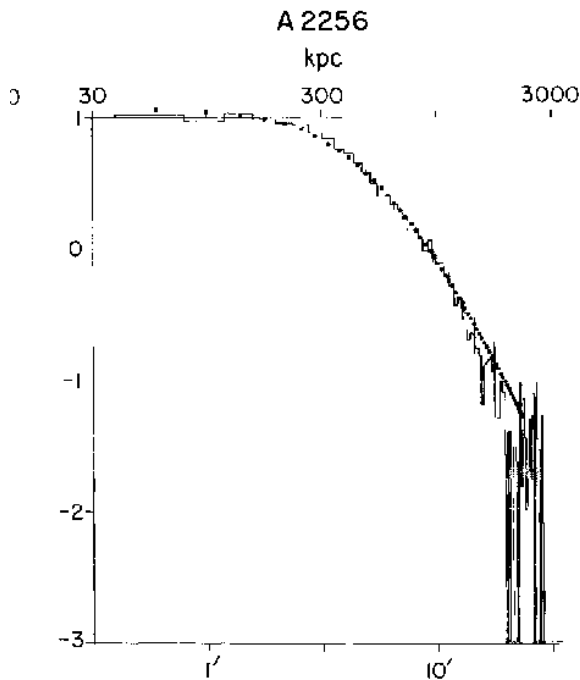


FIG. 2.—*Finstein* IPC radial X-ray surface brightness profile of the Hydra A cluster. Crosses are the model, continuous line is the data.

β モデル による観測のフィッティング 2

Ikebe et al. 1997, ApJ 481, 660

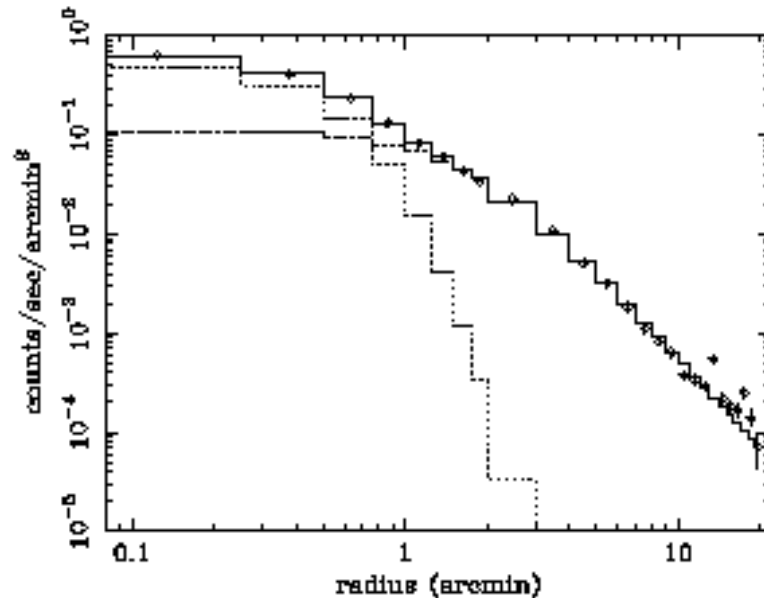


FIG. 3.—Background-subtracted PSPC radial profile fitted with the double β model. Open circles represent the data, and histograms the models.

とまあ、こんな感じになる。

「問題点」

- かなり多くの銀河団、とくにコア半径の小さいものでは、 β モデルでフィットするとコアの付近に超過 excess が出る。これは普通、「低温成分」(いわゆる Cooling flow) として理解されている。
- 一般に、スペクトルと銀河の速度分散から決めた β のほうが、 β モデルの β よりも2倍くらい大きめにでる。

「問題点」は本当に問題か？

- Cooling flow cluster はコアが小さく、明らかに β モデルによるフィットが適当ではないところに無理に β モデルを当てはめている
- 恒星系の分布が isothermal かどうかは怪しい

最近はもうちょっと違うダークマターモデルとかを使うようになって、この辺の解釈は変わりつつあるみたい。

教訓

- 観測家は自分が大学院生の頃に習った理論で最新の自分の観測を解釈する

教訓

- 観測家は自分が大学院生の頃に習った理論で最新の自分の観測を解釈する
- 理論家は自分が大学院生の頃に習った観測の話をベースにモデルや理論を作る

教訓

- 観測家は自分が大学院生の頃に習った理論で最新の自分の観測を解釈する
- 理論家は自分が大学院生の頃に習った観測の話をベースにモデルや理論を作る
- 理論家の講義は時代遅れな観測に基づいた時代遅れな理論の話だったりする

ρ から f を求める

分布関数を実際に、例えば観測データの説明として使うためには、与えられた密度に対して、それを実現するような分布関数を作るという作業が必要になる。これを、 $f(E)$ の場合についてやってみる。

$f(E)$ の時の密度と分布関数の関係は

$$\rho(r) = 4\pi \int_0^\Psi f(\mathcal{E}) \sqrt{2(\Psi - \mathcal{E})} d\mathcal{E}. \quad (54)$$

密度が至るところ正ならば Ψ は r の単調な関数なので、 ρ を Ψ の関数と思って、両辺を Ψ で微分すれば

$$\frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{d\rho}{d\Psi} = \int_0^\Psi \frac{f(\mathcal{E}) d\mathcal{E}}{\sqrt{\Psi - \mathcal{E}}} \quad (55)$$

ρ から f を求める 続き

$$\frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{d\rho}{d\Psi} = \int_0^\Psi \frac{f(\mathcal{E}) d\mathcal{E}}{\sqrt{\Psi - \mathcal{E}}} \quad (56)$$

これは Abel の積分方程式になっていて、以下の解を持つ

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}} \frac{d}{d\mathcal{E}} \int_0^\mathcal{E} \frac{d\rho}{d\Psi} \frac{d\Psi}{\sqrt{\mathcal{E} - \Psi}} \quad (57)$$

ちょっと書き替えれば

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}} \left[\int_0^\mathcal{E} \frac{d^2\rho}{d\Psi^2} \frac{d\Psi}{\sqrt{\mathcal{E} - \Psi}} + \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \left(\frac{d\rho}{d\Psi} \right)_{\Psi=0} \right] \quad (58)$$

例: Jaffe model

Jaffe model

$$\rho = \frac{r_J^4}{r^2(r + r_J)^2}, \quad \Psi = -\ln \left(\frac{r}{r + r_J} \right) \quad (59)$$

を考える。これをもってきたのは結果が簡単だから。

まず、 r を Ψ で表してそれを ρ の式に入れると、

$$\rho = (e^{\Psi/2} - e^{-\Psi/2})^4 \quad (60)$$

これを式58に入ればいいわけだが、 $x = \sqrt{\mathcal{E} - \Psi}$ (ただし、 $\mathcal{E} = -Er_j/GM$) を積分変数にすれば、

$$\begin{aligned} f(E) = & \frac{M}{2\pi^3(GMr_J)^{3/2}} [F_-(\sqrt{2\mathcal{E}}) - \sqrt{2}F_-(\sqrt{\mathcal{E}}) \\ & - \sqrt{2}F_+(\sqrt{\mathcal{E}}) + F_+(\sqrt{2\mathcal{E}})] \end{aligned} \quad (61)$$

但し、

$$F_{\pm} = e^{\mp x^2} \int_0^x e^{\pm x'^2} dx' \tag{62}$$

Jeans Equations

無衝突ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (63)$$

のモーメントをとっていろいろ考えてみる。

速度空間全体で積分

第3項は発散定理で表面積分に置き換えられ、結局 0 になる。

速度空間で積分 (続き)

最初の2項は

$$\nu = \int f d^3\mathbf{v}; \bar{v}_i = \frac{1}{\nu} \int f v_i d^3\mathbf{v} \quad (64)$$

と置いてやれば (密度と、局所的な平均速度)

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial (\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (65)$$

これは、流体の場合の連続の式と同じ。

もうちょっといろいろする

さらに、速度の1次のモーメントをとるために Collisionless Boltzman に v_j を掛けて積分してみると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f v_j d^3\mathbf{v} + \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = 0, \quad (66)$$

というような式が出てくる。但し、 i についての和をとっていることに注意。

さて、 $v_j f$ について発散定理（1次元）を使えば

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = - \int \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f d^3\mathbf{v} = -\delta_{ij} \nu \quad (67)$$

となるので、結局

$$\frac{\partial(\nu \bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (68)$$

但し、 $\overline{v_i v_j}$ は $v_i v_j$ の局所平均である。もうちょっと見通しの立つ式にするために、まず連続の式を使って第一項から $\partial \nu / \partial t$ を消すと

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} - \bar{v}_j \frac{\partial (\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\nu \overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (69)$$

さらに、

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} \quad (70)$$

を使って書き直すと

Jeans 方程式

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \nu \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial (\nu \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \quad (71)$$

これは、流体の場合のオイラー方程式（運動方程式）と大体同じ格好になっている。左辺は平均の流れに沿って見た平均速度の Lagrange 微分であり、右辺第一項はポテンシャルから力である。

最後の項は普通なら圧力の項が出てくる。流体と違うのは、ここが非等方的な stress tensor σ_{ij}^2 になっているということである。

なお、いうまでもないが、速度分布が等方的であれば stress tensor は $\sigma^2 I$ （ I は単位行列）の形に書ける。

例：球対称恒星系の M/L

密度分布が球対称で平均の流れがない場合、極座標系での Jeans equation は以下の形に書き直せる：

$$\frac{d(\overline{\nu v_r^2})}{dr} + \frac{\nu}{r} [2\overline{v_r^2} - (\overline{v_\theta^2} + \overline{v_\phi^2})] = -\nu \frac{d\Phi}{dr} \quad (72)$$

(証明は、、まあ、面倒なだけなので省略) もうちょっと話を簡単にするために、等方的な場合を考えると、結局

$$\frac{1}{\nu} \frac{d(\overline{\nu v_r^2})}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr} \quad (73)$$

すなわち

$$M(r) = -\frac{r\overline{v_r^2}}{G} \left(\frac{d \ln \nu}{d \ln r} + \frac{d \ln \overline{v_r^2}}{d \ln r} \right) \quad (74)$$

M/L の推定

$$M(r) = -\frac{\overline{r v_r^2}}{G} \left(\frac{d \ln \nu}{d \ln r} + \frac{d \ln \overline{v_r^2}}{d \ln r} \right) \quad (75)$$

で、質量が「観測量」からわかる。つまり、密度と速度分散の半径方向の分布がわかれば、質量分布が決まるということになる。

ν は質量を反映していないもの、例えば星の数とか、あるいは単位体積あたりの luminosity の分布でも構わない

さらに、球対称、等方を仮定したので、表面輝度分布や視線方向速度分布から輝度密度と速度分散の空間分布を求められるので、これらから「実際にどれだけの質量があるはずか」を求められるわけである。

M/L の推定

というわけで、実際の観測データから M/L の空間分布が決められることになる。楕円銀河の中心に大質量ブラックホールがあるというような話は、もっとも簡単にはこのようにして質量を推定する。

なお、逆に、 M/L を一定として、速度の非等方性の空間分布を求めることもできる。多くの、中心に大質量ブラックホールがあるとされている楕円銀河で、非常に非等方性の高い速度分布を作れば観測された密度と速度分散の分布が説明できないわけではないということが示されている。

ビリアル定理

ジーンズ方程式から、さらに空間全体のモーメントをとる。
式68において、密度 ν を質量密度 ρ で置き換え、さらに x_k を掛けて空間全体で積分する。

$$\int x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_j)}{\partial t} d^3\mathbf{x} = - \int x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{x_i} d^3\mathbf{x} - \int \rho x_k \frac{\partial \Phi}{x_j} d^3\mathbf{x} \quad (76)$$

右辺の最初の項は、例によって発散定理を使って書き直せる。

$$\int x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{x_i} d^3\mathbf{x} = - \int \delta_{ki} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3\mathbf{x} = -2K_{kj} \quad (77)$$

これは、運動エネルギーテンソル K の定義を与える。ついでに第二項はポテンシャルエネルギーテンソル W と呼ばれるものである。

ビリアル定理 (続き)

さらに、 σ^2 の定義を使って、

$$K_{jk} = T_{jk} + \frac{1}{2}\Pi_{jk} \quad (78)$$

但し

$$T_{jk} = \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3\mathbf{x}, \quad \Pi_{jk} = \int \rho \sigma_{jk}^2 d^3\mathbf{x}, \quad (79)$$

さらに、 j, k についての式と k, j についての式を足してやると

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3\mathbf{x} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \quad (80)$$

ビリアル定理 (続き 2)

さらに、慣性モーメントテンソル

$$I_{jk} = \int \rho x_j x_k d^3\mathbf{x} \quad (81)$$

を導入して、連続の式とか発散定理とかを使うと

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \int \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3\mathbf{x} \quad (82)$$

で、結局

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \quad (83)$$

これをテンサービリアル定理という。

スカラービリアル定理

今定常状態（ I の時間微分が 0）を考え、さらに上の式のトレースをとってみると、 T 、 Π の定義からこれらの寄与は全運動エネルギー K の 2 倍になる。 W の方は、 Φ の定義を使えば

$$W = \int \rho \sum_k x_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} d^3 \mathbf{x} = \int \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \sum_k \frac{x_k (x_k - x'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{x}' \quad (84)$$

ここで $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ を入れ換えた積分を書き、両方を足すと

$$W = \frac{1}{2} \int \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \sum_k \frac{(x_k - x'_k)^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{x}' = \frac{1}{2} \int \rho \Phi d^3 \mathbf{x} \quad (85)$$

というわけで、 W は系の全ポテンシャルエネルギーである。

スカラービリアル定理 (続き)

結局、

$$2K + W = 0 \quad (86)$$

が成り立つ。これを、スカラービリアル定理、または単にビリアル定理という。

今、系の全エネルギーを E とすれば、 $E = K + W$ であるから、

$$E = -K = W/2 \quad (87)$$

ということになる。つまり、定常状態にある自己重力恒星系では、必ず全エネルギーはポテンシャルエネルギーのちょうど半分であり、絶対値が運動エネルギーに等しい。これは球対称とかそういう仮定なしに常に正しい。

系の「比熱」

自己重力系は熱平衡ではありえない。しかし、King modelのように近似的に熱平衡なものもあるので、ここでエネルギーの出入りに対する系全体の応答、つまり比熱というものを考えてみる。

ビリアル定理から $K = -E$ 、つまり、「エネルギーを奪うと運動エネルギーが増え、逆ならその逆になる」。つまり、見かけ上比熱が負になっている。これは重力が効く系では普通のこととで、例えば地球を回る人工衛星といったものでも同様のことが起こっているわけである。

この、「見かけ上比熱が負」ということが、熱力学的不安定を通して構造形成（自己組織化）が起きる基本的な理由である。

回転系の偏平度（あるいは楕円銀河の回転）

z 軸まわりに対称な、回転している銀河を考える
ポテンシャルテンソルについては対称性から

$$W_{xx} = W_{yy}; \quad W_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (88)$$

で、運動エネルギーについても同様にクロスタームは消えるので、結局テンソルビリアル定理で残るのは

$$2T_{xx} + \Pi_{xx} + W_{xx} = 0; \quad 2T_{zz} + \Pi_{zz} + W_{zz} = 0 \quad (89)$$

の2つだけである。この2つから、

$$\frac{2T_{xx} + \Pi_{xx}}{2T_{zz} + \Pi_{zz}} = \frac{W_{xx}}{W_{zz}} \quad (90)$$

回転系の偏平度 続き

今、子午面環流みたいなのではないとすれば、 $T_{zz} = 0$ で、

$$2T_{xx} = \frac{1}{2} \int \rho v_{\phi}^2 d^3x = \frac{1}{2} M v_0^2 \quad (91)$$

(これは v_0 、つまり平均の回転速度の定義)。同様に

$$\Pi_{xx} = M \sigma_0^2 \quad (92)$$

これは横から見たランダム速度の平均 (r.m.s)

z 方向については x 方向との速度分散の異方性パラメータ δ を導入して

$$\Pi_{zz} = (1 - \delta) \Pi_{xx} \quad (93)$$

と書いておくことにする。

回転系の偏平度 続き 2

まとめると

$$\frac{v_0^2}{\sigma_0^2} = 2(1 - \delta) \frac{W_{xx}}{W_{zz}} - 2 \quad (94)$$

ということになる。

W_{xx}/W_{zz} と、銀河の「形」の関係については:

一般に密度が以下のように書ければ

$$\rho = \rho(m); \quad m^2 = a_1^2 \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2} \quad (95)$$

つまり、密度が軸比一定の楕円体の表面上で一定なら、 W_{ii}/W_{jj} は a だけの関数で $\rho(m)$ の関数形によらない

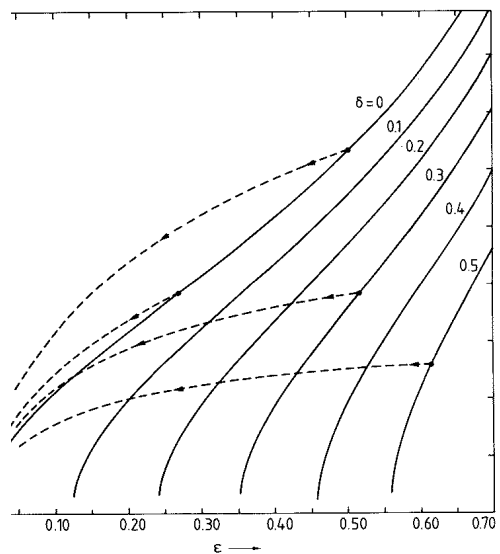
回転系の偏平度 続き 3

実際に書くとかなり面倒な形をしているので、具体的な形は Binney and Tremaine(以下BT) をみてもらうことにして、結果だけを使うと、

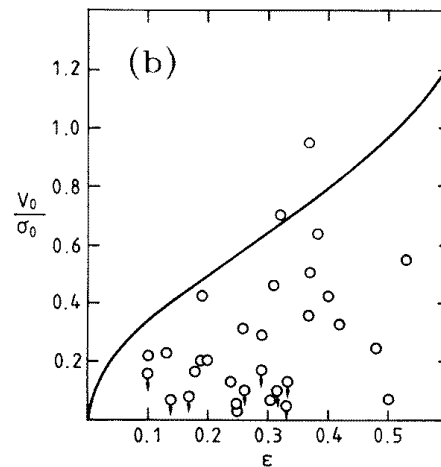
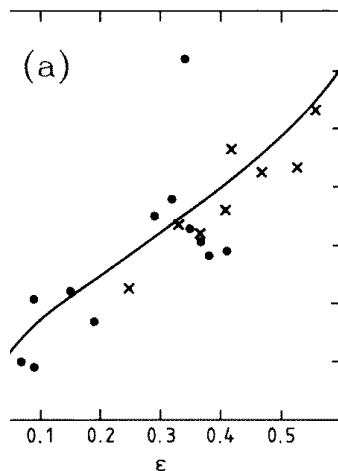
速度の非等方性 δ と偏平度 $\varepsilon 1 - b/a$ を決めれば $\frac{v_0}{\sigma_0}$ が決まる。

回転系の偏平度 続き 4

BT の図:



The relationship between the rotation parameter v/σ and ϵ predicted by (4.95) for elliptical galaxies whose isodensity



-6. (a) The positions in the $(v/\sigma, \epsilon)$ plane of elliptical galaxies (dots), and ids (crosses), that have luminosities smaller than $L = 2.5 \times 10^{10} L_{\odot}$. (b) as (a) but for elliptical galaxies brighter than $L = 2.5 \times 10^{10} L_{\odot}$. (After al. 1983.)

左: ϵ の関数として $\frac{v_0}{\sigma_0}$ がどう変化するか

右: 実際の観測結果と $\delta = 0$ の線を重ねた。

回転系の偏平度 続き 5

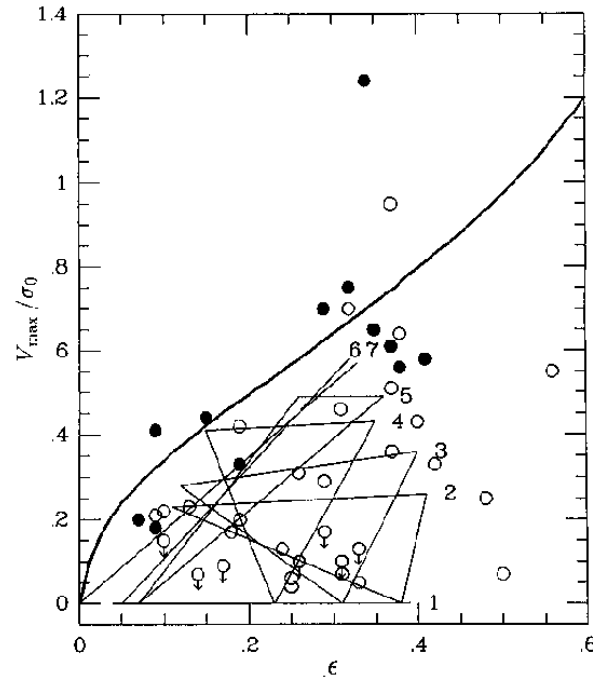
- 暗い楕円銀河は $\delta = 0$ の線に近いところに集まっている
- 明るいものは可能な範囲全体にあり、どちらかというところの方（回転が小さく、おそらく異方性が大きいほう）に集まっている

これは多分できかたが違ふことと関係している。

とはいふものの、どうやってできたかということに対する標準的な理解というものがあるわけでは必ずしもない。

ここでは、せつかくなので一つの考え方として、合体説（楕円銀河のうち、特に大きいものは銀河同士の合体でできた）をとった場合にはどのような説明が可能かということを見てみる。これ以外の解釈がないというわけではない。

回転系の偏平度 続き 6



Ratio of the maximum rotation velocity to the central velocity dispersion ($V_{\max}/\sigma_0$) plotted against the ellipticity (ϵ). Three vertices of triangles indicate numerical results observed from the a -, b -, and c -axes. The open circles indicate rotational luminous ellipticals ($M_B < -20.5$); the filled circles indicate less luminous ellipticals ($M_B > -20.5$). The data were taken from Davies et al. (1983).

Okumura *et al.* (1991, PASJ 43, 781) によるシミュレーションの結果との比較

回転系の偏平度 続き 7

2つの等方的で回転を持たないプラマーモデルを2つ放物軌道でぶつけた

番号順に最初の軌道の近点距離が大きくなる（4で $r_p/r_h = 2.6$ である）。

番号の大きいものほど軌道角運動量が大きいのので、 v_0/σ_0 が大きくなる。但し、ある程度より大きくなっていない。合体するためにはかなりの軌道角運動量を捨てないといけないので、残った系が持つ角運動量には上限があるため。

「仮に楕円銀河が合体で出来たとすれば」

暗いものは初期に近点距離の大きな軌道から明るいものは近点距離の小さな軌道からできた。

ジーンズ不安定

ここまで、自己重力多体系の平衡形状を（ごく簡単な場合だけ）扱ってきたが、そろそろ飽きてきたような気もするので、これからは平衡形状ではなく時間発展について考えることにしたい。

時間発展といっても、もとの方程式が強い非線形性を（加速度の項に）持つので、一般的な場合を解析的に扱うなんてことはほとんど出来ない。そこで、まず、平衡状態から無限小だけずれている場合に対して線形化した発展を考えるということにする。さらに、話を簡単にするために、「無限一様」な平衡状態とし、まず CBE ではなく流体の話を考える。

流体のジーンズ不安定

流体は、連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (96)$$

オイラー方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \quad (97)$$

ポアソン方程式

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (98)$$

で記述される。あ、あと状態方程式がいる。これはいま圧力が密度だけの関数で与えられるとする。(断熱でも等温でもなんでもいいが)

線型化

今、 $\rho, p, \mathbf{v}, \Phi$ をそれぞれ $\rho = \rho_0 + \rho_1$ という格好にして、添字 0 がつくものはもとの方程式の平衡解であり、1 がつくものは小さい（二次以上の項を無視していい）として方程式を書き直すと、 v_s を音速として

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_0) = 0 \quad (99)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \quad (100)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 \quad (101)$$

$$p_1 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \rho_1 = v_s^2 \rho_1 \quad (102)$$

無限一様の時

既に述べたように、無限一様でいたるところ密度、圧力が等しいというのが平衡で、速度も0だったとすると、上の2本は

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) = 0 \quad (103)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \quad (104)$$

となる。下2本は見かけはかわらない。これを、 ρ_1 だけの式にすれば

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0 \quad (105)$$

めでたく方程式が線形化されたので、分散関係を求めれば算数はおしまい。どういう方程式か 見ておこう。

定性的な理解

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0 \quad (106)$$

最初の2項をみれば普通の波動方程式で、最後の項がポアソン方程式を通してでてくる重力の項である。したがって、波長が短い極限では普通の波動方程式に近づく。これに対し、波長が長い極限では空間2階微分の項が効かなくなるので、線形の常微分方程式になってしまう。

分散関係

実際に分散関係を求めるために、解を

$$\rho_1 = C e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (107)$$

として代入すれば

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (108)$$

ということになる。

分散関係 (続き)

$$k_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{v_s^2} \quad (109)$$

と書くと、

- $k > k_J$ なら ω は実数。この時は解は振動的（普通の音波と同じ）
- $k = k_J$ なら $\omega = 0$ で、与えた摂動は時間発展しない（中立安定）
- $k < k_J$ なら ω は純虚数。この時は解は減衰する解と発散する解の両方がある（不安定）。

分散関係 (続き 2)

定性的に見たときにわかったように、波長が短ければ普通の音波として振舞うが、波長が $1/k_J$ より長いと時間の指数関数で進化することになる。つまり、密度が上がり始めたらどんどんあがる（下がり始めたらどんどんさがる）ということになる。

恒星系でのジーンズ不安定

何度も出てきたがもう一回式を書いておく。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (110)$$

ここで f は6次元位相空間での分布関数である。 Φ は重力ポテンシャルであり、以下のポアソン方程式の解として与えられる。

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (111)$$

G は重力定数であり、 ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int d\mathbf{v} f, \quad (112)$$

である。これを流体の時と同様に線形化して、その振舞いを調べる。

線型化

分布関数を $f_0 + f_1$ 、ポテンシャルを $\Phi_0 + \Phi_1$ とし、添字0がつくほうは定常解であるとして式を整理すれば

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 - \nabla \Phi_0 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} - \nabla \Phi_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (113)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \int f_1 d\mathbf{v}. \quad (114)$$

ということになる。これが線形化された無衝突ボルツマン方程式である。

Jeans 不安定

ここではもっとも簡単に解析できる場合として空間分布が一様な場合を考える。これから f_0 は速度だけの関数であり、 Φ_0 は定数としていいことになるので

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 - \nabla \Phi_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (115)$$

と少し式が簡単になる。まず、流体の場合と同じような平面波型の解を考えてみよう。

$$f_1 = f_a(\mathbf{v}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (116)$$

$$\Phi_1 = \Phi_a \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (117)$$

を

平面波型の解

速度空間の方にも伝わっていく波とかいうのも考えられないわけではないが、とりあえずそういうのは考えない。これらを線形化した式に入れば

$$(-\omega + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) f_a(\mathbf{v}) - \Phi_a \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (118)$$

$$-k^2 \Phi_a = 4\pi G \int f_a d\mathbf{v} \quad (119)$$

となる。これらから f_a を消せば、 Φ_a も落ちて

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} d\mathbf{v} = 0 \quad (120)$$

となつて、 f_0 が与えられていれば k と ω の関係、すなわち分散関係を与える。

臨界点

分散関係

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} d\mathbf{v} = 0 \quad (121)$$

はちょっと困った式で、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega = 0$ が特異点になっている。したがって、実数の振動数を考えるのはすこし厄介な話になる。まず、臨界点、すなわち振動数が0の場合と、不安定、すなわち振動数が純虚数の場合を考えよう。

臨界点 (続き)

式が繁雑なので、いま、波数ベクトルを x 軸方向にとることにすると、分散関係は

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial v_x}}{k v_x - \omega} d\mathbf{v} = 0 \quad (122)$$

臨界安定で $\omega = 0$ とすれば、結局

$$k_J^2 = -4\pi G \int \frac{\frac{\partial f_0}{\partial v_x}}{v_x} d\mathbf{v} \quad (123)$$

となる。 f_0 が $v_x = 0$ で有限で微分可能なら積分は求まるので、これから $\omega = 0$ となる波数 k_J は決まる。

流体との対応

速度分布 f_0 をマックスウェル分布

$$f_0(v) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-v^2/2}{\sigma^2}\right) \quad (124)$$

にしてみる。これは例によって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv = \sqrt{2\pi\sigma^2} \quad (125)$$

を使って全部積分できて、

$$k_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{\sigma^2} \quad (126)$$

となる。これは、流体の場合と同じになっている。つまり、中立安定な波長（ジーンズ波長）は、恒星系と流体で同じである。

不安定な場合

次に、振動数が純虚数の場合を考えてみる。この時は、 $\omega = i\gamma$ として元の式にマックスウェル分布を入れて整理すると

$$1 + \frac{2\sqrt{2}\pi G\rho_0}{k\sigma^3} \int \frac{v_x e^{-v_x^2/2\sigma^2}}{kv_x - i\gamma} dv_x = 0 \quad (127)$$

ここで、被積分関数の分母を実数にするために

$$\frac{v_x(kv_x + i\gamma)e^{-v_x^2/2\sigma^2}}{k^2v_x^2 + \gamma^2} dv_x = 0 \quad (128)$$

と書き直すと、虚部は奇関数なので落ちる。

不安定な場合 (続き)

実部は

$$\int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x^2}}{x^2 + \beta^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \frac{1}{2} \pi \beta e^{\beta^2} [1 - \operatorname{erf}(\beta)] \quad (129)$$

なる関係を使って

$$k^2 = k_J^2 \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\pi} \gamma}{\sqrt{2} k \sigma} \exp \left(\frac{\gamma^2}{2 k^2 \sigma^2} \right) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2} k \sigma} \right) \right] \right\} \quad (130)$$

なんだかよくわからないが、まあ、 k と $\omega(\gamma)$ の関係を与えてはいる。 $k < k_J$ なら、ある実数 γ (正負どちらでも) があって上を満たす。ただし、 $k = k_J$ の場合と $k = 0$ の極限を除いては、値は流体の場合とは一致しない。

不安定な場合 (続き 2)

というわけで、波長がジーンズ波長よりも長いモードは流体と同様不安定で、勝手に成長することになる。

van Kampen mode

さて、それでは、音波に当たるような振動数が純実数のモードというものはあるのだろうか？

これは数学的には少し微妙な話になるので、結論だけ：

- 普通の振動モードはない
- デルタ関数的な「モード」はあるが、これは普通の形にすると時間的に広がってしまう

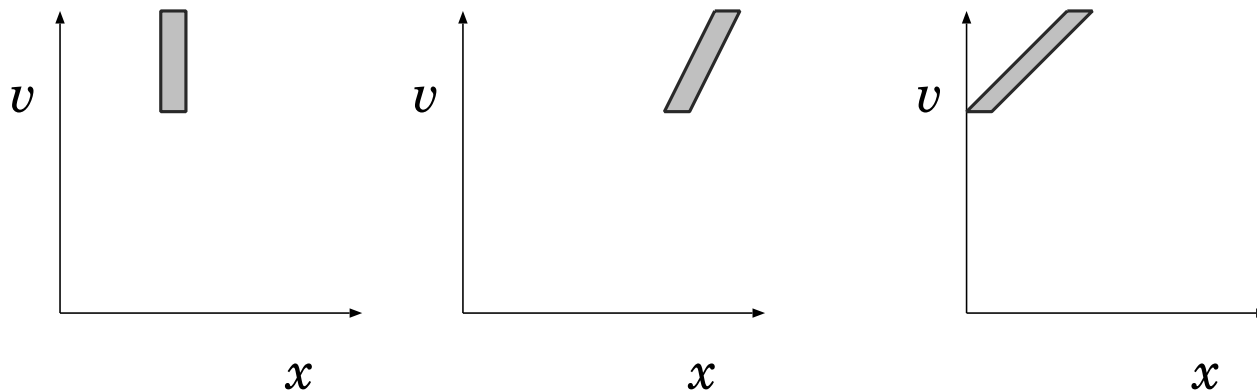
Phase Mixing

デルタ関数的な「モード」しかないということの意味:

簡単な例で考えてみる

1次元で、重力がない系である有界な領域に摂動 (overdensity) を与えたとする。で、簡単のために周期境界で、右から出ていったものが左から入ってくるとしよう。もちろん、ちゃんと適当なポテンシャルを考えるとか、無限一様な場合を考えるとかしても本質は同じである。(無限一様な場合は、単に周期的な摂動を与えたというのに対応する)

Phase Mixing (続き)



すると、時間がたつに従って摂動が引き延ばされていくということがわかる。このために、例えば密度の変化といった量は時間がたつにしたがって減衰していく。

つまり、singular な van Kampen mode 自体は減衰しないが、それを重ね合わせた有限の広がりを持つ摂動は減衰する。これが通常 phase mixing と呼ばれるものである。

粗視化

通常のエントロピーは

$$S = \int f \ln f dx dv \quad (131)$$

であるわけだが、これを適当な分解能で荒く見たものを考えてみよう。それにはいろいろな考え方があるが、ここでは適当なフィルタ $g(x, v; h)$ というものを考え、

$$\int g(x, v; h) dx dv = 1 \quad (132)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int f g(x_0 - x, v_0 - v; h) dx dv = f(x_0, v_0) \quad (133)$$

というようなもの、つまり、適当な極限で δ 関数になるようなものを考える。

粗視化された分布関数

粗視化された分布関数 $\hat{f}_h$ というものを

$$\hat{f}_h = \int f g(x - x_1, v - v_1; h) dx_1 dv_1 \quad (134)$$

と定義する。

ちゃんと計算して見せた方がもちろんいいんだけど、結局どう
いうことがいえるかっていうと、粗視化されたエントロピー

$$\hat{S} = \int \hat{f} \ln \hat{f} dx dv \quad (135)$$

というものを考えると、これは増えるということである。

というわけで、どういう風に増えるかってのは計算練習。

粗視化されたエントロピーの増大

「粗視化されたエントロピーは増える」という性質は、平衡からのずれが線形でも非線形でも変わらない。

言い換えれば、仮にいま平衡状態から遠くはなれたものをなにか考えたとして、その時間進化を適当に粗視化したエントロピーで見たとしよう。そうすると、 $\hat{S}$ は時間がとともに増えて、そのうちにある定常値に達する。しかし、これは、あくまでも速度空間での分布関数の構造が粗視化のために分解できなくなったというだけで、系が物理的に熱平衡状態に向かって進化しているわけではないことに注意しなければならない。

Wave-particle interaction

ちょっとここで話を変えて、波と粒子の相互作用を考えてみる。これはつまり、とにかくなんかポテンシャルの波があった時に、粒子はどう振る舞うかということである。

これは概念的には安定性/不安定性と関係があるかどうかあまり自明ではない。既に述べたように、安定領域では音波のような波は普通には存在しないからである。

しかし、後の話との都合があるのでちょっと整理しておく。

Wave-particle interaction (続き)

とにかくポテンシャルの波というのがあって、速度 v_w で動いているとする。これに対して速度 v_p で動いている粒子があるでしょう。この粒子と波の相互作用というものを考えてみる。

$v_p \sim v_w$ 、つまり大体同じ速さで動いていることにすると、粒子はその波に対する相対的位置によって受ける力の方向が変わる。波に対して遅れていれば引っ張られるし、そうでなければ減速される。このため、初期にどういう位相にいたかによって、大きくエネルギーをもらったり失ったりするものがあることになる。

Wave-particle interaction (続き 2)

波が無限に長い間維持されていれば、無制限にエネルギーをやりとり出来るわけではない。

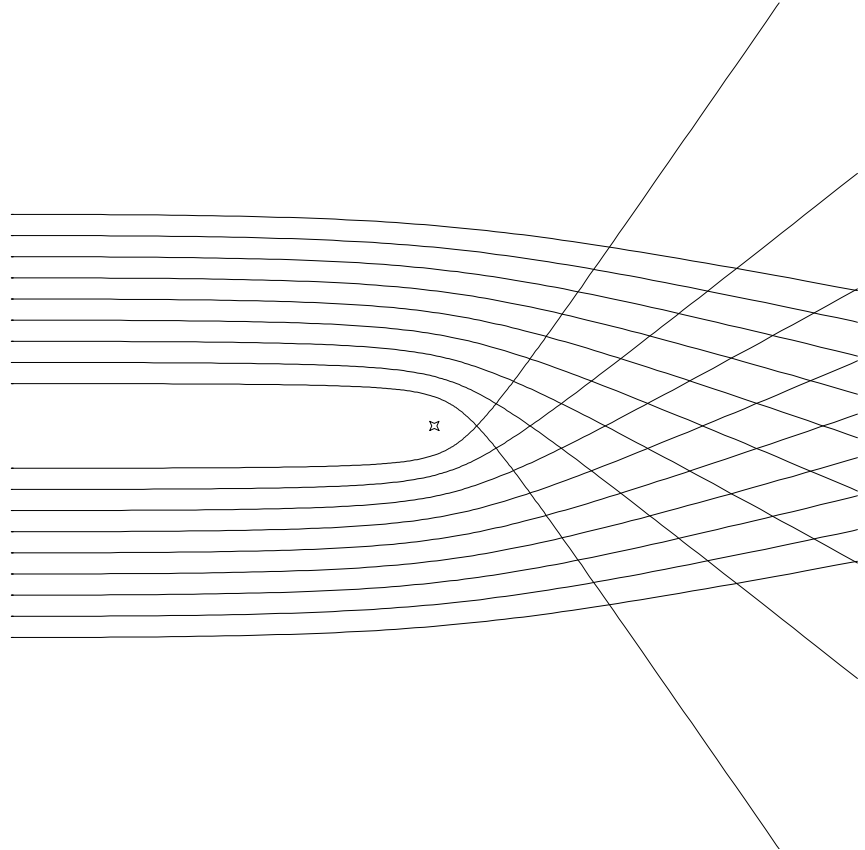
座標変換して波が止まっている座標で見れば当然のことで、あるポテンシャルの谷のなかに止まっているか、それとも超えて動いていくかのどちらかであって平均すればエネルギーのやりとりは起きないことになる。

もっとも、ここで波がまた指数関数的に減衰しているはずとか仮定するといろんなことが起きるが、省略。

Dynamical Friction

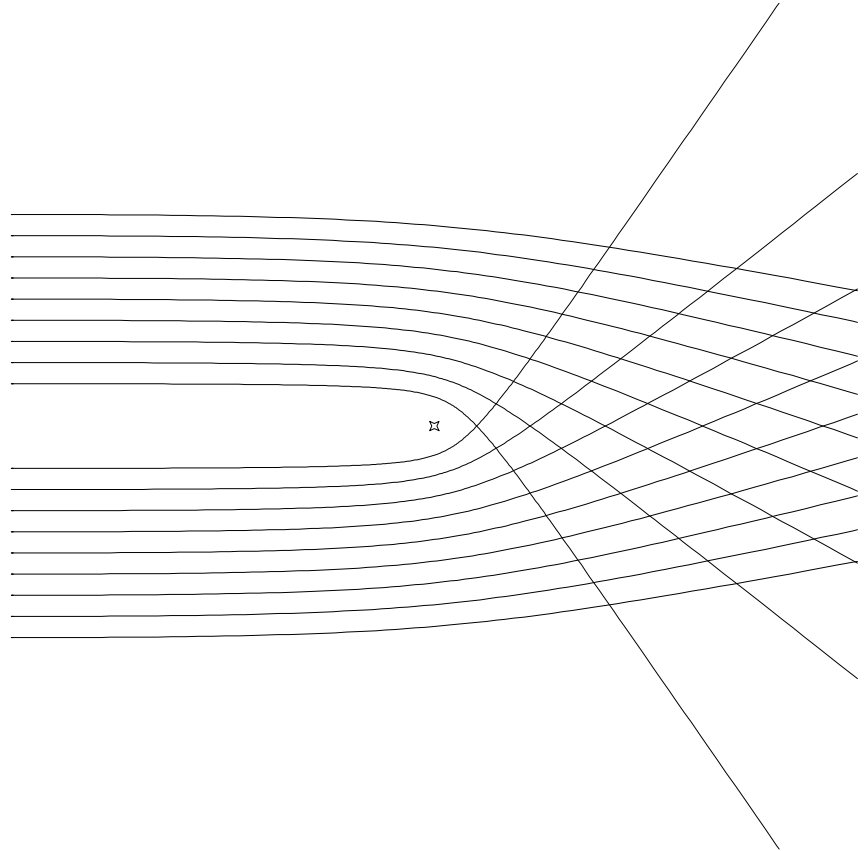
少し違った状況を考えてみる。今、温度 0 の、無限に一様な物質分布の中を、適当な大きさを持った球対称なポテンシャルの摂動（質点によるものでも OK）が動いているとしよう。

バックグラウンドの物質がどう動くかを考えると、質点の方に固定した座標系では図のように、平行に入ってきたものが散乱されるだけである。



Dynamical Friction (続き)

ここで、しかし、もともとの止まっていた物質分布に固定された座標系で考えると、散乱されたものは、左向きと中心向きの速度をもらうことになり、ネットに加速されている。つまり、エネルギーをもらっている。



Dynamical Friction (続き 2)

回りがネットにエネルギーをもらっているので、動いている質点のほうは減速される = dynamical friction

別に動いているものが単純な質点のポテンシャルとかでなくても、3次元空間のなかで有界なものが動いていれば常に働く
つまり、一方向に進む平面波というようなものを考えるとネットにエネルギーのやりとりは出来ないが、孤立波とか非周期的な摂動とかを考えるとちゃんとそれが非線形なダンピングを受けることになる。

Dynamical Friction (続き 3)

このように、摂動と回りの相互作用を考えれば、実際にエネルギー交換がおきてそれが摂動のエネルギーを回りに伝えるということ自体は起こり得る。

ただし、この場合でも、やはりエントロピー生成はないということは依然として注意が必要である。 Dynamical Friction の例では、質点の運動エネルギー（これはエントロピーを持たない）が回りの粒子の運動に変換されたわけだが、回りの粒子の運動は依然としてシステマティックなものでありランダム成分を持たないので、エントロピーは生成されていないのである。

Violent relaxation

ここまで述べてきたことは、

- Phase mixing では、粗視化エントロピーを増やすことができる。
- 波と粒子の相互作用を考えても、 phase mixing 以外の要因で粗視化エントロピーが増えるわけではない。

とまとめることができる。

Phase mixing では粒子のエネルギーが変わらないので、通常の意味で熱平衡に近付いているのではないということはある。

エネルギーが変化したら？

しかし、粒子のエネルギーが変化する場合はどうだろう？エントロピーが生成されていないからといって、なんらかの意味で熱平衡に近付いていないと断言できるだろうか？

このような問題意識には、観測的な理由もないわけではない。それは、楕円銀河というものの存在である。

楕円銀河というのは、結構たくさんあるわけだが、これはどれも似たような形をしている。これはたんに形が似ているというだけではなく、実は、半径方向の密度（表面輝度）分布に比較的に共通性が高いということがわかっている。具体的には、いわゆる $r^{1/4}$ 則、あるいは Hernquist Profile で良く近似できているわけである。

Violent Relaxation

楢円銀河がどういふふうにして出来たかは良くわかっていないが、初期条件がどれもこれも非常に良く似ていたというのはあまりありそうにない。それにも関わらず、みんなが良く似た形をしているというのは、なんらかの熱平衡にむかうような緩和過程の存在を示唆しているのかもしれない。

というようなことを考えて、Lynden-Bell (1967) は violent relaxation というものを提案した。彼の論理は、大雑把にいうと次のようなものである

Violent Relaxation (続き)

- 系がまだ力学平衡に落ちついていないあいだ、密度分布、したがってポテンシャルは複雑な時間変化をする。これは、それぞれの粒子エネルギーを変える。
- 粒子のエネルギーの変わり方は初期の位置（位相空間内の）によって決まるので、エントロピーが変わるとか、ランダム化されるとかいうことはないが、粗視化してみれば粒子のエネルギーの変わり方はランダムとみなせるはずである。
- 従って、このランダムな変化に対する熱平衡が存在するはずである。これを Lynden-Bell 統計と名付ける。

Violent Relaxation (続き)

というわけで、

- 力学平衡に向かう間は、単に phase mixing だけが起こっているわけではなくこの Lynden-Bell 統計に向かう進化も同時に起きているはずである。

なお、Lynden-Bell 統計であって普通の Maxwell-Boltzmann 統計には従わない理由は、 f の値に制約がある（初期の分布の最大値を超えられない）からであるそうである。

Lynden-Bell は大変偉い先生であるので、この提案は大きな影響力を持った（現在も持っている）。

帰結

violent relaxation によって起きる緩和は、いくつかの点で通常の熱平衡に向かうものと異なっている。

- 系がまだ力学平衡に落ちついていないあいだ、密度分布、したがってポテンシャルは複雑な時間変化をする。これは、それぞれの粒子エネルギーを変える。
- 等分配が働かない。これは、（単位質量当たりの）エネルギー変化が位置だけで決まるからである。
- 通常の意味で平衡に近付くかどうかは本当はわからない。
- 緩和がどの程度進むかはわからない。力学平衡に落ちつけばエネルギー変化は止まってしまうからである。

数値実験とその解釈

理論だけではどうなるかよくわからないのでいろんな人が数値計算をした。

以下、 van Albada (1982, MNRAS 201, 939) の結果紹介
計算コード： 極座標でポアソン方程式を球面調和関数展開してポテンシャルを求める

1982 年に $N = 5000$

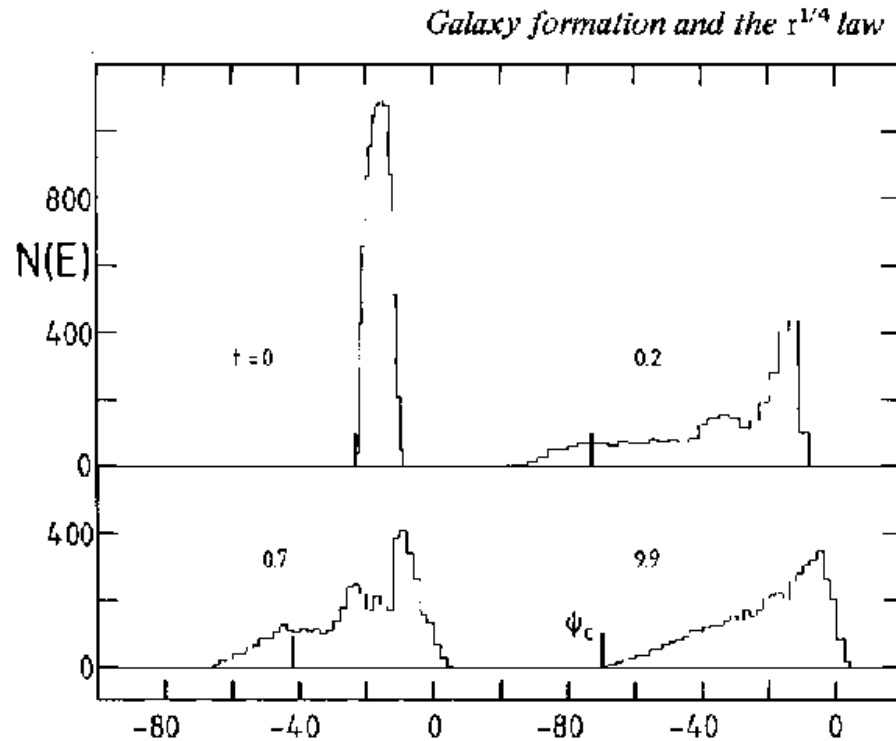
粒子の数の意味についてはまたあとで

初期条件：

粒子に少しだけランダム速度を与える。

大体球状（実際には、いろいろ変化させているが）に分布。

$N(E)$ のプロット



$N(E)$ の定義: $N(E)dE = dN^E$

「あるエネルギー範囲にある粒子の数」

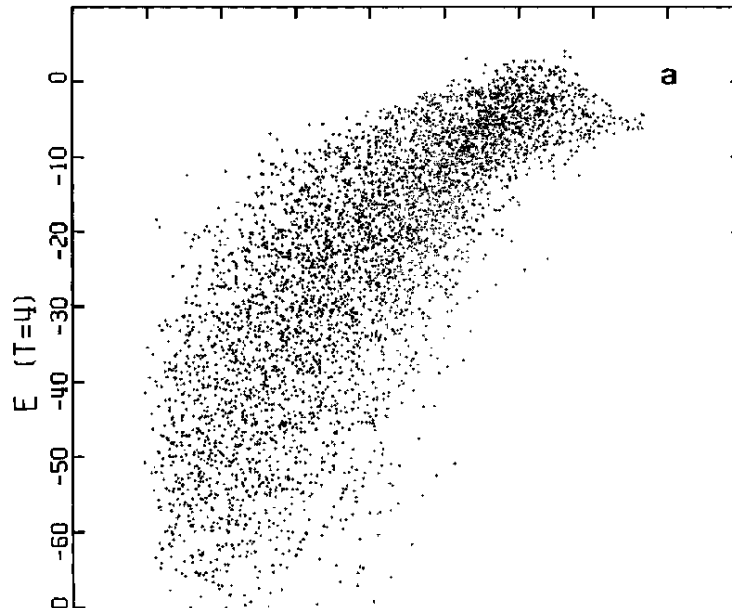
数値計算では簡単に求まる。分布関数は難しい。

結果の解釈

- 初期分布は狭い
- 最終状態は広がっている

つまり： ある程度まで violent relaxation というものが起こっている

ある程度とはどの程度か？



初期のエネルギーと落ちついた後のエネルギーの関係
非常に強い相関が残っている

つまり？

もともとエネルギーが低かったものは相対的に低いまま、高いものは高いままに留まる傾向がある。

十分に緩和した、とはいいがたい。

色々見ると

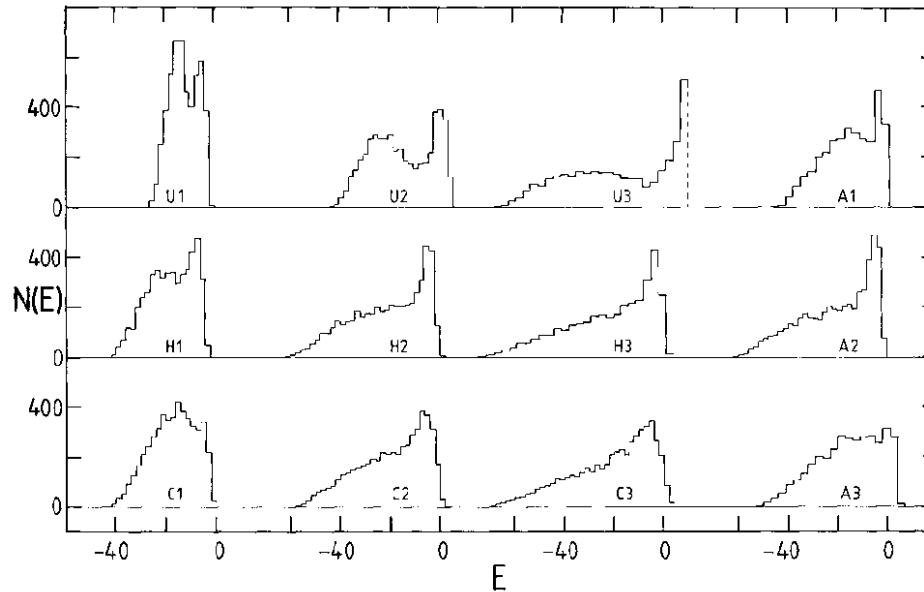


Figure 7. Histogram of binding energies for the final equilibrium models.

さまざまな初期条件からの結果のまとめ。

初期条件によって、 $N(E)$ はいろいろであり、とてもある一つのものに向かうといえるようなものではない。

数値実験のまとめ

Lynden-Bell が主張したような violent relaxation は、全く働かないというわけではないが十分に熱平衡に近い状態を実現できるほど有効に働くわけでもない。

このために、無衝突系の最終状態は初期条件の記憶を強く残している。

Violent relaxation (続き)

橿円銀河がそれなりによく似ている理由は violent relaxation の他にあるか？

一応2つほど紹介。

$N(E)$ の連続性

楕円銀河は円盤銀河とはちがった何らかの力学的な進化、すなわち Lynden-Bell が想定したような系全体の振動のようなものを経験している、とは考えてもよさそう。

それからなにかいえることは？

実は、分布関数が特徴的な性質をもつであろうということが直接にいえる。このことは「何となく」理解されていた。

ある程度明確に述べたのは、IAU Symposium 127 “Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies” での Scott Tremaine (Conference Summary) と W. Jaffe (Poster) の発表

以下 Jaffe にしたがって簡単にまとめる。

$N(E)$ の連続性 (2)

何らかの原因、例えば他の銀河と合体するとか、合体しないまでも近くを通り過ぎるとかで大きな振動が励起されたとする。すると、それが構成する各粒子のエネルギーを変化させることになる。

- 粒子のなかには、エネルギーが正になってそのまま無限遠にいったってしまうものもある。
- 正でなくても、エネルギーがある程度 0 に近ければ、一旦遠くにいった、また戻ってくる頃には系はほとんど落ちついているので、それ以上エネルギーが変化するということはない。

エネルギーが 0 に近い粒子の分布はどうなるか？

$N(E)$ の連続性 (2)

普通の熱平衡: この辺に無限に沢山粒子がある。

- 単純に位相空間の体積が発散しているため。
- 等温モデルが有限質量にならないのはこのため。

さっきのできかたを考えると有限個。つまり、エネルギーが0に近い粒子というものは確かに作られるが、その分布は熱平衡を満たすようにはならない。

ではどうなると考えられるであろうか？

エネルギーが 0 付近の分布

粒子は自分のエネルギーが正になってしまうかどうかを知っているわけではないし、どれくらいの phase volume があるかどうかということを知っているわけでもない。

エネルギーが0に近い粒子の分布は、 $N(E)$ が特異でない（発散したり 0 にいったりしなくて、おそらく微分可能である）ということによって特徴付けられるはず。

実際、前回例に出した van Albada の数値実験では多くの場合にそうになっていた。

$N(E)$ は、 $E = 0$ の付近、すなわち、大雑把に言って $r \rightarrow \infty$ の極限で、 $N(E) = N_0 + N'_0 E \dots$ の形の展開を持ち、特に $N_0 > 0$ である。

$N(E)$ から分布を？

$N(E)$ だけから空間構造とかでるか？角運動量は？

という問題はあるけどちょっと考えてみよう。

「十分外側」を考えるので、ポテンシャルは

$$\Phi = -M/r \quad (136)$$

で与えられるとする。単純な例として、すべての粒子が円軌道を回る、すなわち最大の角運動量を持つ場合を考える。

$$E = -\frac{M}{2r} \quad (137)$$

である。つまり、エネルギーが決まれば中心からの距離が決まる。密度を求めるにはヤコビアンを計算すればいい。

円軌道の場合続き

つまり

$$dM = |4\pi r^2 \rho dr| = |N(E) dE| \quad (138)$$

と、式137からでる

$$\frac{dE}{dr} = \frac{M}{2r^2} \quad (139)$$

から、

$$\rho = \frac{MN(E)}{8\pi r^4} \quad (140)$$

を得る。

つまり、密度は 半径の -4 乗。実は色々なモデルで外側は -4 にしているのは理論的にはこう、と思っているせいもある。

円軌道以外では？

等方的でも同じ： Jaffe (1987) が示した。

でも、強く非等方なら？ 多分実際はそうだし。

逆の極限、すなわち、すべての粒子が角運動量を全く持たない場合にも円軌道と同じ結果になることがわかる。これは、実際に軌道が解けるので、エネルギーごとにある位置への滞在確率を求めて積分すれば密度が求まるが、その式から結局滞在確率が外にでてしまうからである。

直線軌道の時

あるエネルギー E の粒子が、中心からの距離がある範囲 $(r, r + dr)$ にいる確率が $P(E, r)dr$ で書けるとすれば、密度は

$$4\pi r^2 \rho = \int_{E_r}^0 P(E, r) N(E) dE \quad (141)$$

で与えられる。ここで E_r は距離 r に到達できるエネルギーの最小値であり、 $-M/r$ で与えられる。いま、ケプラーポテンシャルのなかでの直線軌道を考えているので、 $P(E, r)$ は書き下すことができ、特に

$$P(E, r) = P_0(r/r_E)/r_E \quad (142)$$

の形に表現できる。ここで $r_E = -M/E$ である。

直線軌道の時の続き

さらに $x = rE/M$ という変数変換を行なって適当に整理すると、

$$\rho = \frac{M}{4\pi r^4} \int_{-1}^0 -P_0(x)xN(Mx/r)dx \quad (143)$$

これから、 $r \rightarrow \infty$ の極限で、積分の中が収束することがわかる。従って、すべてが radial orbit の場合も円軌道の場合もおなじことになる。

一般に J に分布があったらどうか?というのと、これは、 $N(E, J)$ の形で実際に分布を与え、 J についての依存性にどのような制約があれば上と同様の結果が得られるか調べればわかる。ここでは結論だけを述べておくと、かなりゆるい条件のもとでOKであることがわかっている。

$N(E)$ についてのまとめ

結局、比較的一般的な条件として、自己重力系で力学平衡から大きくずれた振動などを経験した場合には、 $N(E)$ が $E \sim 0$ で連続という条件から、 $\rho \sim r^{-4}$ という結論が出せる。これは、前にモデルのところででてきた Hernquist model や Jaffe model に共通な性質であり、これらは、（中心部の構造が全く違うにも関わらず）どちらも楕円銀河に良く合うとされている。「観測的に楕円銀河の性質が共通である」というのはその程度の意味であると考えるべきかもしれない。つまり、基本的には外側のほうで $\rho \sim r^{-4}$ に漸近していくような構造というのが本質ではないかと考えられる。

中心部の構造

中心部の構造についてはなにかいえないのであろうか？10年ほど前に、Navarro たち (ApJ 1997, 490, 493) は、数値計算の結果をもとに以下のような主張をした

- CDM シナリオによる構造形成を考えた時、CDM が作る自己重力系（ガスとか星を考えない）は以下の形に書ける

$$\rho \propto \frac{1}{r_*(1 + r_*)^2} \quad (144)$$

- この形はユニバーサルで、例えば一つの銀河でも銀河団でも同じである

これは、極めて有名になった NFW プロファイルである。

中心部の構造 続き

実は、Navarro たちの結果の解釈は割合すぐに異論がでた。

CDM と初期条件を制限しても、例えば Fukushima and Makino (ApJ 1997, 477 L9) とか Moore et al. (ApJ 1998, 499, 5L) は「ユニバーサル」な形になったのは数値誤差のせいとかいう主張した。

そのへんの人の結果では Navarro たちのものより中心で等温に近い、 -1.5 くらいのスロープ。

Navarro らの結果は 1 万粒子程度であるが、Fukushige ら、Moore らは 100 万粒子程度。

多分大きいほうが信用できる。

中心部の構造 続き 2

つまり、現状では、中心部（というか、half mass radius より内側）の構造は、

- 第0近似としては半径の -1.5 乗程度のカスプになる。
- どういうメカニズムでそうなるかはまだよくわからない

という状況であるといえる。